LectureIII

April 17, 2016

1 Modely vesmíru I.

1.1 Stavová rovnice

Víme již, že k řešení Friedmannových rovnic je nám zapotřebí znalost stavové rovnice pro příslušnou komponentu, příspívající k hustotě energie ve vesmíru

$$P = P(\rho) = P(\varepsilon)$$

Stavová rovnice nemusí být vůbec jednoduchá záležitost, nicméně v kosmologii máme relativně jednoduché typy formy hmoty.

1.1.1 Nerelativistický zředěný plyn - prach

Pro tento typ plynu platí, že tepelný pohyb částic je nerelativistický. Platí klasická stavová rovnice

$$P = \frac{\rho}{\mu} kT$$

kde μ je střední hmotnost částice nerelativistického plynu. Hustota energie je dána především

$$\varepsilon \approx \rho c^2$$

Z toho plyne úpravou

$$P \approx \frac{kT}{\mu c^2} \varepsilon$$

Ze vztahu mezi střední kvadratickou rychlostí $\langle v^2 \rangle$, teplotou T

$$3kT = \mu = \langle v^2 \rangle$$

Můžeme tedy pro nerelativistickou hmotu psát s použitím předchozích vztahu stavovou rovnici ve tvaru

$$P_{\text{prach}} = w\varepsilon_{\text{prach}} \ll 1$$

kde

$$w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2}$$

Abychom si učinily představu, v jakém rozmezí teplot můžeme považovat hmotu za nerelativistickou, tak v případě protonu toto platí až do teploty $T \ll 10^{13}$ K.

1.2 Fotonový plyn

V případě fotonového plynu je situace složitější. Přesné odvození budete probírat v rámci předmětu Teorie přenosu záření a hvězdných atmosfér uvedeme si přibližné odvození pro 1-D případ. Foton, přestože nemá žádnou hmotnost, podle Einsteionovy relace sebou nese hybnost o velikosti

$$p = \frac{E}{c} = h\nu c$$

a díky tomu vytváří tlak. Tento ** tlak záření**. lze odvodit ilustrativně podobně jako tlak molekul plynu na odraznou desku. Fotony přílétajícího z prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$ ze směru daného úhlem θ, jsou od perfektně odrážející elementární plochy $\mathrm{d}A$ desky odráženy opět pod úhlem θ do prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$. Změna z-ové složky momentu hybnosti fotonů s vlnovou délkou v intervalu $< \lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda >$ odražených od elementární plošky $\mathrm{d}A$ v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ je dána

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p_\lambda \mathrm{d}\lambda &= \left[p_\lambda^{\text{final,z}} - p_\lambda^{\text{initial,z}}\right] \mathrm{d}\lambda & (1)\\
&= \left[\frac{E_\lambda \cos\theta}{c} - \left(-\frac{E_\lambda \cos\theta}{c}\right)\right] \mathrm{d}\lambda & (2)\\
&= \frac{2E_\lambda \cos\theta}{c} \mathrm{d}\lambda & (3)\\
&= \frac{2}{c} I_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}A \, \cos^2\theta \, \mathrm{d}\Omega & (4)
\end{aligned}$$

Uvážíme-li, že pokud podělíme $\mathrm{d}p$ elementárním časovým intervalem $\mathrm{d}t$ a ploškou $\mathrm{d}A$m dostaneme sílu, kterou působí fotony na elementární plošku $\mathrm{d}A$ (znaménko mínus plynoucí z Newtonova třetího zákona ignorujeme, značí jenom opačný směr síly). To není nic jiného než **tlak záření** od fotonů z prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$. Integrací přes celou polokouli dostaneme výsledný **tlak záření** od fotonů s vlnovou délkou $< \lambda, \mathrm{d}\lambda >$

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{rad},\lambda} \mathrm{d}\lambda &= \frac{2}{c} \int_{\text{polokoule}} I_\lambda \mathrm{d}\lambda \cos^2\theta \, \mathrm{d}\Omega & (5)\\
&= \frac{2}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \, \cos^2\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi & (6)
\end{aligned}$$

V našem případě nebudeme zkoumat odraz od zdi, bude nás zajímat tlak izotropního záření existující v celém vesmíru, odmyslíme si tedy naši pomocnou odraznou desku a nahradíme ji matematickým popisem plochy z skrze kterou záření prochází, tedy kouli. Z předchozího vztahu tedy zmizí faktor 2, který značil změnu momentu v důsledku odrazu a integrace bude probíhat přes celou kouli

$$P_{\mathrm{rad},\lambda} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \, \cos^2\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi. \quad (7)$$

Navíc využijeme předpokladu izotropního záření, tedy intenzita nebude záviset na úhlech θ, ϕ a výraz můžeme zintegrovat

$$P_{\mathrm{rad},\lambda} \mathrm{d}\lambda = \frac{4\pi}{3} I_\lambda \mathrm{d}\lambda$$

Celkový tlak záření do fotonů všech vlnových délek dostaneme opět integrací pře vlnové délky

$$P_{\mathrm{rad}} = \int_0^\infty P_{\mathrm{rad},\lambda} \, \mathrm{d}\lambda$$

Pokud budeme předpokládat záření s vlastnostmi záření absolutně černého tělesa dostaneme

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty B_\lambda(T) \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{3} u$$

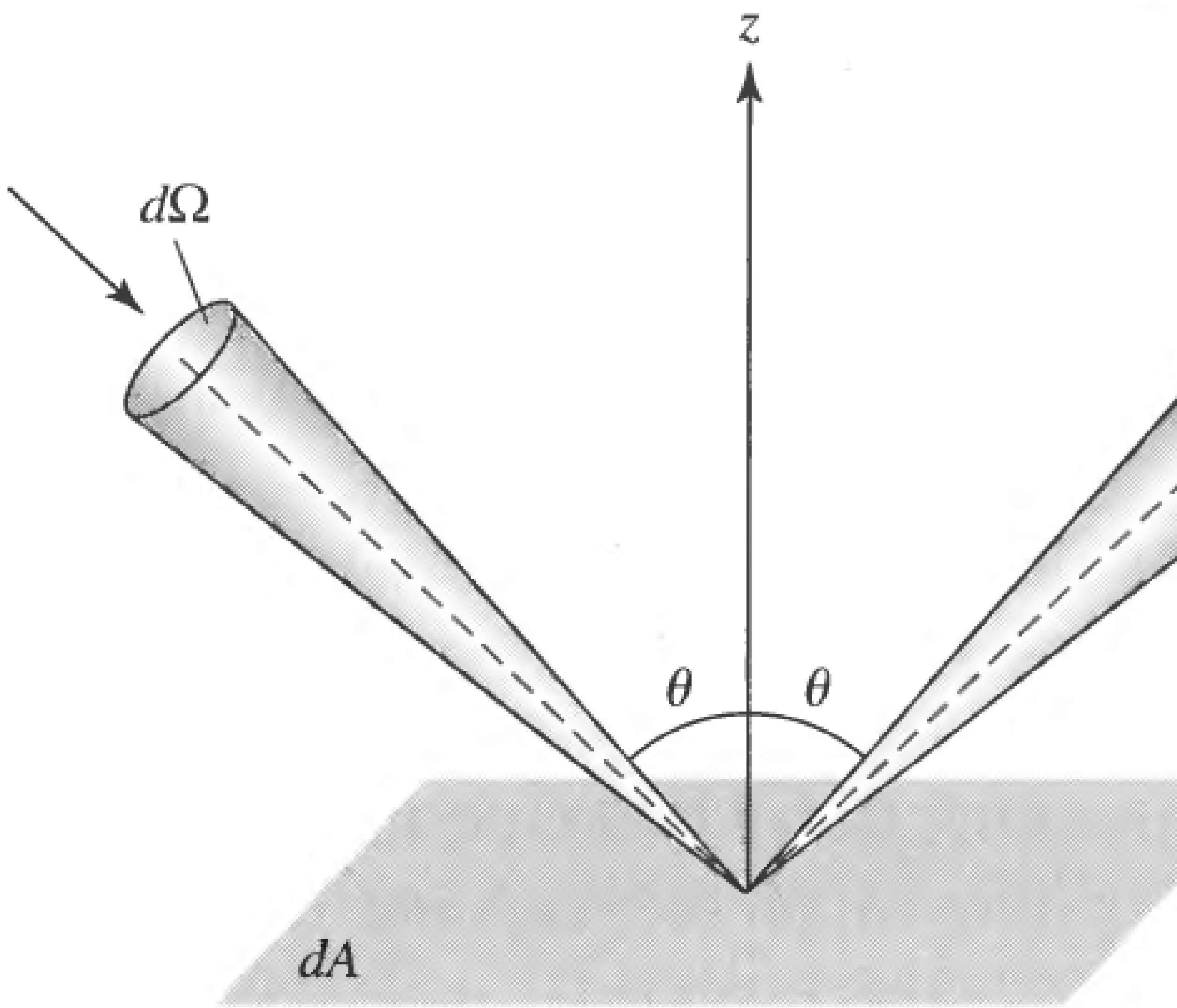

Figure 1: Tlak záření od fotonů - odvození

kde u je celková hustota energie záření absolutně černého tělesa. Můžeme tedy pro stavovou rovnici relativistického plynu psát

$$P_{\mathrm{rad}} = w\varepsilon_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3}\varepsilon_{\mathrm{rad}}$$

1.2.1 Různé formy hmoty

Obecně lze psát stavovou rovnici v kosmologii ve tvaru

$$P = w\varepsilon_{\mathrm{rad}}$$

kde w nabývá různých hodnot pro různé druhy formy hmoty.

2 Kosmologická konstanta

Kosmologická konstanta vděčí za svůj objev Albertu Einsteinovi. Po té co v roce 1915 spatřila světlo světa Teorie relativity, nic nechybělo k tomu, aby tuto teorii aplikoval na reálný vesmír. Již v tu dobu bylo známo, že energie záření pocházející z hvězd je mnohem menší než příspěvek klidové energie nerelativistické hmoty (hvězdy, galaxie...). Samozřejmě je třeba zmínit, že ještě nebylo známo nic o reliktním záření a i co se týče galaxií, byly teoretické poznatky o jejich složení, morfologii a vzdálenosti dosti mlhavé. Relativně tedy správně tedy usoudil, že dominantní příspěvek k hustotě energie ve vesmíru pochází od nerelativistické hmoty.

Na základě tehdejších neúplných informací bylo velmi snadné se domnívat, že vesmír statický, tedy že se nerozpíná ani nesmršťuje. Otázka je, jestli takovéto chování je v souladu s teorií, tedy jestli může být vesmír plný nerelativistické hmoty statický. Odpověd̆ na tuto otázku je překvapivě záporná. Vesmír, který obsahuje hmotu se může bud̆ rozpínat nebo smršťovat. Podívejme se na celou situaci v newtonovské aproximaci. Hmota ve vesmíru daná hustotou ρ určuje gravitační potenciál ϕ v souladu s Poissonovou rovnicí

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

Gravitační zrychlení $\vec{a}$ lze určit v jakémkoliv bodě ze znalosti gravitačního potenciálu

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi$$

Pokud by vesmír měl být statický, pak musí také v každém bodě prostoru $\vec{a} = 0$. To znamená, že potenciál ϕ musí být konstantní v prostoru. Z Poissonovy rovnice pak plyne

$$\rho = \frac{1}{4\pi G}\nabla^2\phi = 0$$

Jediný způsob jakým lze realizovat statický vesmír, je vesmír prázdný. Pokud vzniklý vesmír obsahuje hmotu, která je v počátečním stavu statická, vlivem gravitace se začne smršťovat. Pokud vzniklý vesmír obsahující hmotu na začátku expanduje, pak bude v expanzi pokračovat bud̆ navždy nebo do určité doby, po které se začne opět smršťovat. Vše záleží na množství hmoty ve vesmíru.

Jak tedy Abert Einstein vyřešil tento problém, když mu bylo jasné, že vesmír rozhodně není prázdný ? Jednoduše přidal do Poissonovy rovnice člen

$$\nabla^2\phi + \Lambda = 4\pi G\rho$$

označený řeckým písmenem Λ, který je známý spíše jako kosmologická konstanta. Pokud její velikost bude

$$\Lambda = 4\pi G\rho$$

docílíme tím podmínku pro statický vesmír. Je nutné modifikovat také Friedmannovu rovnici, korektním odvozením bychom dostali

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Z předchozí rovnice je patrné, že přidání kosmologické konstanty je ekvivalentní přidání nové komponenty o hustotě energie

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$$

Rovnice pro tekutinu kosmologickou konstantou není nijak dotčena

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0.$$

Rovnice pro zrychlení

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Pokud kosmologická konstanta Λ zůstává konstantní v čase, totéž platí pro hustotu energie příslušející kosmologické konstantě. Z rovnice pro tekutinu plyne pro konstantní hustotu energie

$$P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$$

to znamená, že kosmologickou konstantu můžeme považovat za složku hmoty ve vesmíru, která má konstantní hustotu energie a **záporný tlak**.

Tímto způsobem dostal Einstein statický vesmír. Stačí dosadit do rovnice pro zrychlení a uvážit, že pro statický vesmír $\ddot{a} = 0$ a $\dot{a} = 0$. Dostáváme

$$0 = -\frac{4\pi G}{3}\varepsilon + \frac{\Lambda}{3}$$

Dále, pokud $\dot{a} = 0$, pak z Friedmannovy rovnice plyne s použitím hodnoty kosmologické konstanty $4\pi G\rho$ pro statický vesmír

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} = 4\pi G\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

Z toho pohledu Einsteinův statický model musí být pozitivně zakřivený $\kappa = +1$ s poloměrem křivosti

$$R_0 = \frac{c}{2(\pi G\rho)^{1/2}} = \frac{c}{\Lambda^{1/2}}$$

Pokud Λ má hodnotu větší než $4\pi G\rho_0$, pak expanze vesmíru bude akcelerovat. Původně Einstein považoval zavedení kosmologické konstanty za svůj největší omyl, nicméně se v poslední době opět dostala do popředí a to zejména díky novým pozorováním, které svědčí o akceleraci expanze vesmíru.

2.1 Rovnice pro tekutinu pro obecný typ hmoty

Uvažme, že pro každou komponentu můžeme psát stavovou rovnici ve tvaru

$$P = w\varepsilon.$$

kde w nabývá různých hodnot. Stavovou rovnici dosadíme do rovnice pro tekutinu

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w)\varepsilon = 0$$

Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon} = -3(1 + w)\frac{\mathrm{d}a}{a}.$$

Za předpokladu, že w je konstantní, integrace vede k výrazu

$$\varepsilon(a) = \varepsilon_0 a^{-3(w+1)}$$

přičemž jsme použili normalizace pro hodnotu škálovacího faktoru v současnosti $a_0 = 1$, ve které je hodnota hustoty energie ε_0

2.2 Vesmír s dominancí prachu

Pro vesmír s dominantní prachovou složkou můžeme pro stavovou rovnici použít $w = 0$. Ze rovnice pro tekutinu pak plyne, že

$$\varepsilon_{\text{prach}}(a) = \frac{\varepsilon_{0,\text{prach}}}{a^3}$$

Nyní už známe závislost všech potřebných veličin na škálovacím faktoru, abychom mohli určit jeho průběh řešením Friedmannovy rovnice pro tento typ vesmíru

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\varepsilon_{0,\text{prach}}}{a^3} \tag{8}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\varepsilon_{0,\text{prach}}}{a} \tag{9}$$

Rovnice vyřešíme pomocí klasických metod nebo sofistikovaným odhadem. My použijeme druhý způsob, budeme předpokládat řešení ve tvaru

$$a(t) \propto t^q$$

dosazením do předchozí Friedmannovy rovnice dostaneme podmínky sorvnáním řádu polynomu na pravé i levé straně (jinak se nemohou výrazy rovnat)

$$2(q-1) = -q \tag{10}$$

$$q = \frac{2}{3} \tag{11}$$

Vidíme tedy, že hledané řešení lze závisí na čase

$$a(t) = ct^{2/3}$$

kde c je normovací konstanta. Tu určíme z podmínky, že v čase t_0 (v současnosti) je škálovací faktor roven $a(t_0) = 1$. Z této podmínky plyne pro konstantu

$$c = t_0^{-2/3}$$

Výsledný výraz pro průběh škálovacího faktoru je

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

Hubbleova konstanta pak

$$H = \frac{2}{3t}$$

2.3 Vesmír s dominancí záření

Analogicky pro vesmír s dominantní složkou tvořenou zářením můžeme pro stavovou rovnici použít $w = 1/3$. Z rovnice pro tekutinu pak plyne, že

$$\varepsilon_{\mathrm{rad}}(a) = \frac{\varepsilon_{0,\mathrm{rad}}}{a^4}$$

Je patrné, že s rozpínaním vesmíru se hustota energie záření snižuje rychleji než hustota energie chladné hmoty. Rozdíl spočívá v tom, že kromě číselné hustoty částic záření se také zvetšuje vlnová délka záření, tedy energie částice klesá

$$E = \frac{hc}{\lambda} \propto a^{-1}$$

dosazením do Friedmannovy rovnice

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\varepsilon_{0,\mathrm{rad}}}{a^4} \tag{12}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\varepsilon_{0,\mathrm{rad}}}{a^2} \tag{13}$$

Diferenciální rovnici řešíme úpravou

$$a^2\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \tag{14}$$

$$\frac{a}{\mathrm{d}a} = K\mathrm{d}t \tag{15}$$

Řešením této rovnice je

$$a \propto Kt^{1/2}$$

Konstantu K určíme opět z podmínky, že škálovací faktor v čase t_0 je $a(t_0) = 1$. Z této podmínky plyne

$$K = \left(\frac{1}{t_0}\right)^{1/2}$$

Výsledný vztah je

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

a Hubbleova konstanta pro tento případ

$$H(t) = \frac{1}{2t}$$

2.3.1 Kosmologická konstanta Λ

Budeme postupovat opět analogicky, nejprve určíme vztah pro hustotu energie, kdy pro kosmologickou konstantu platí $w = -1$. Hustota energie se tedy s časem nemění

$$\varepsilon_\Lambda = \varepsilon_{0,\Lambda}$$

Dosazením do Friedmannovy rovnice dostáváme

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_\Lambda a^2$$

Rovnice můžeme jednoduše přepsat na jednoduchou diferenciální rovnici

$$\dot{a} = H_0 a \tag{16}$$

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_\Lambda}{3c^2} \right)^{1/2} \tag{17}$$

jejíž řešení je

$$a_\Lambda = \exp\left(H_0 \left(t - t_0\right)\right)$$