LectureVII

May 16, 2016

0.0.1 Proč je obloha tmavá - Olbersův paradox

Proč by měl být fakt, že je obloha tmavá paradoxní ? Pro starověké národy to určitě problém nebyl, jak ale jednou přijmeme myšlenku nekonečného vesmíru plném hvězd, stává se tato situace paradoxní. Pojďme se podívat na celý problem blíže a spočítejme jas oblohy v nekonečném vesmíru. pro výpočet jsou důležité dvě veličiny, průmerná číselná hustota hvězd n a průměrná hvězdná svítivost L.

Zářivý tok dopadající na Zemi od hvězdy se svítivostí L ve vzdálenosti r je dán

$$f(r) = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

Dále uvažujme pomysllnou sféricky symetrickou slupku kolem Země o poloměru r a s tlouštkou dr. Z této slupky obsahující hvězdy k nám dopadá záření o intenzitě

$$\mathrm{d}J(r) = \frac{L}{4\pi r^2} n r^2 \mathrm{d}r = \frac{nL}{4\pi}\mathrm{d}r$$

Celkovou intenzitu záření dopadající na Zemi od všech hvězd ve vesmíru dostaneme integrací přes všechny slupky

$$J = \int_{r=0}^{\infty} \mathrm{d}J = \frac{nL}{4\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r = \infty$$

Z toho logicky plyne nekonečný jas oblohy, což je v prudkém rozporu s realitou. Některý z našich předpokladů tak musí být špatný. Nevyřčeným předpokladem je příma viditelnost všech hvězd ve vesmíru,což není pravda, uvažíme-li že hvězdy mají nenulovou úhlovou velikost a tak bližší hvězdy zakrývají ty vzdálenější. To však moc nepomůže, pokud máme nekonečné množství hvězd, pak v kterémkoliv směru narazíme na hvězdu. Obloha pak sice nebude mít nekonečný jas ale jas průměrné hvězdy. Ani mezihvězdný materiál absorbující světlo hvězd nepomůže, takový materiál by v našem případě byl světlem hvězd zahříván dokud by jeho teplota nebyla stejná jako teplota na povrchu hvězdy. Potom už však materiál absbuje stejné množství světla jako emituje a tak zaří stejným jasem jako hvězda.

Další nevyřčený předpoklad je předpoklad konstantního průběhu střední číselné hustoty hvězd n a střední svítivosti L, přesněji řečeno součin nL nezávisí na vzdálenosti r. Vzdálenejší hvězdy by mohli být méně svítivé a mohlo by jich být méně. V takovém případě by mohl dojít k významné redukci jasu oblohy , již by nebyla jasná. Nicméně jednak by musel součin nL klesat k nule mnohem rychleji než $1/r$. Navíc by neplatil kosmologický princip.

Třetím předpokladem je nekonečnost vesmíru, pokud by byl konečný s maximální vzdáleností $r_{\max}$, pak celková intenzita záření od všech hvězd ve vesmíru by byla $J \sim nLr_{\max}/(4\pi)$. Čtvrtým předpokladem je nekonečné stáří vesmíru. Pokud tento předpoklad neplatí pak vidíme pouze záření hvězd, které k nám stihlo doputovat (díky omezené rychlosti světla) $J \sim nLct_0/(4\pi)$. Posledním předpokladem je platnost vztahu

$$f \propto \frac{1}{r^2}$$

tedy, že tok záření klesá se čtvercem vzdálenosti. To na první pohled vypadá nesmyslně, nicméně víme, že v expandujícím nebo kontrahujícím vesmíru je světlo ze vzdálených zdrojů posunuto k fotonům s nižší energií resp. vyšší.

Jaké je tedy správné řešení Oblersova paradaxu ? Správné vysvětlení paradoxu spočívá v konečném stáří Vesmíru, hvězdy za určitým horizontem nevidíme, protože světlo od nich k nám nestačilo doputovat.

0.1 Problémy teorie Velkého Třesku

0.1.1 Problém plochého Vesmíru

Z předchozích lekcí víme že pro vývoj a geometrii vesmíru je určujícím faktorem celková hustota hmoty vyjádřena s pomocí parametru $\Omega_{\text{total}} = \Omega_0 + \Omega_\Lambda$. Víme, že parametru v současnosti je $\Omega \approx 1$, což znamená že vesmír má plochou euklidovskou geometrii. Vzpomeňme na Friedmanovu rovnici přepsanou s pomocí parametru Omega

$$(\Omega_{\text{tot}} - 1) = \frac{k}{R_0^2 a^2 H^2}$$

ze které je patrné, že pravá strana nemůže změnit znaménko, tedy charakter geometrie se nemění. Pokud je vesmír uzavřený bude uzavřený navždy, pokud je otevřený bude navždy a pokud je plochý, bude plochý navždy. Přepíšeme rovnici s pomocí absolutních hodnot

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| = \frac{|k|}{R_0^2 a^2 H^2}$$

a uvažme vesmír buď s dominancí hmoty nebo záření, ve kterých můžeme psát

$$a^2 H^2 \quad \propto \quad t^{-1} \tag{1}$$
$$a^2 H^2 \quad \propto \quad t^{-2/3} \tag{2}$$

Z čehož dostáváme

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| \quad \propto \quad t \tag{3}$$
$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| \quad \propto \quad t^{2/3} \tag{4}$$

V obou případech je rozdíl Ω_{tot} a 1 rostoucí funkcí času, z toho plyne, že plochý vesmír je nestabilní situace. Jakákoliv drobná odchylka od plochosti vesmíru vede k tomu, že se vesmír rychle stává zakřivenějším víc a víc. Pokud je tedy vesmír v současné době v podstatě plochý, nutně to znamená že na počátku musel být extrémně plochý, tedy plochý s extrémní přesností. Samozřejmě předchozí výpočty platí pouze do doby kdy je geometrický člen a kosmologická konstanta zanedbatelná. Nicméně pro náhled do situace je to dostatečné. Pro lepší představy se podívejme na konkrétní čísla pro vesmír s dominancí záření (ranné fáze vesmíru)

- Doba oddělení hmoty a záření ($t \approx 10^{13}$ sekund) vede $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \leq 10^{-5}$
- Rovnováha záření a hmoty ($t \approx 10^{12}$ sekund) vede $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \leq 10^{-6}$
- Nukleosyntéza ($t \approx 1$) vede $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \leq 10^{-18}$
- Porušení elektro-slabé symmetrie ($t \approx 10^{-12}$ sekund vede $|\Omega_{\text{tot}} - 1| \leq 10^{-30}$. Což by znamenalo neuvěřitelné štěstí během vzniku vesmíru aby byl s takovou přesností plochý.

0.1.2 Problém horizontu

Klíčovou podstatou tohoto problému je fakt konečného stáří vesmíru. Víme také, že světlo se šíří konečnou rychlostí světla. V minulé lekci o mikrovlném reliktním záření jsme se dozvěděli, že splňuje požadavky kladené kosmologickým principem, je izotropní a homogenní. Reliktní záření přicházející ze všech směrů opdovídá s velkou přesností teplotě $ T = 2.725$K absolutně černého tělesa. Fakt, že má záření všude stejnou teplotu odpovídá tepelné rovnováze, nicméně fotony příchážející k nám z opačných stran oblohy k nám putovali dobu od doby oddělení hmoty a záření, velmi blízké době vzniku vesmíru samotného. V takovém případě však tyto opačné strany nemohli spolu nijak interagovat, tedy být spolu v žádném kauzálním kontaktu. Nemůžeme tedy tvrdit, že takto vzdálené oblasti spolu interagovali a došlo k termodynamické rovnováze. Situace je ještě horší , že v okamžiku kdy se oddělila hmota od záření, fotony se šířili praktcky bez interakce, tedy tyto vzdáleneé oblasti spolu museli interagovat ještě dříve, v době pozorovatelný vesmír byl mnohem menší a fotony mohli cestovat na mnohem kratší vzdálenost. Tedy ani oblasti které dnes vidíme relativně blízko sebe spolu nemohli interagovat. Navíc jakjsme si také ukázali, relitkní záření neni izotropní perfektně, vykazuje drobné fluktuace. Ze stejného důvodu, jako se vesmír nemohl termalizovat nemohli ani vzniknout tyto fluktuace.

0.1.3 Problém abundance reliktních částic

Další záhada se skrývá ve spojení teorie Velkého Třesku a částicové fyziky. Jak už jsme si říkali v minulých lekcích, v ranných fázích dominovalo ve vesmíru záření, které klesá se čtvrou mocninou škálovacího faktoru. Pokud by během ranných fázích existovalo byť malé množství nerelativistické hmoty, pak její pomalejší redukce díky expanzi by vedla k její brzké dominanci.

Ten zásadní problém nespočívá v částicích ze standartního modelu, které v této fázi vesmíru čile interagovali se zářením a termalizovali ale v mnohem podivnějších částicích částicích, které nám předpovídá teorie sjednocených sil - **GUT**, jakými jsou například magnetické monopóly. Teorie předpovída nejen existenci těchto částic ale také jejich velkou abundanci v raných fázích vesmíru a extrémní hmotnost, platnost teorie **GUT** je odhadována na energiích 10^{16} GeV. Takovéto hmotné částice budou nerelativistické po většinu doby trvání vesmíru, jejich problém však spočívá v tom, že žádné takovéto částice nedetekujeme, což je zjevný rozpor

0.2 Inflace jako řešení

Řešení problému nalezl prof. A. Guth v roce 1981, kdy publikoval myšlenku inflačního řešení. Inflací je myšlena hypotéza, že existovala perioda v dávné historii našeho vesmíru, během kterého expanze vesmíru akcelerovala, tedy obdbí kdy platilo $\ddot{a} > 0$. Z rovnice pro akceleraci

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P)$$

již víme, že v takovém případě platilo pro tlak $P < -1/3$, dominantní formou hmoty byla kosmologická konstanta. Pro dominantní kosmologickou konstantu Friedmanova rovnice se nám zjednodušuje

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_i}{3}$$

s řešením ve tvaru

$$a(t) \propto e^{H_i t}$$

kde $H_i = (\Lambda_i/3)^{1/2}$ je Hubbleův čas během inflace.
Zjednodušeně si můžeme průběh škálovacího faktoru znázornit ve třech po sobě jdoucích etapách

$$a(t) = \begin{cases} a_i(\frac{t}{t_i})^{1/2} & t < t_i \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & t_i < t < t_f \\ a_i e^{H_i(t_f-t_i)}(\frac{t}{t_f})^{1/2} & t > t_f \end{cases} \tag{5}$$

kde t_i je počátek a t_f konec inflační fáze. Během tohoto časového období se vesmír zvětšil

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N \quad N \equiv H_i(t_f - t_i)$$

Pokud byla doba trvání inflační fáze mnohem větší než Hubbleův čas během inflace, pak nárůst škálovacího faktoru byl enormní. Uvažme začátek inflační fáze během doby sjednocení sil $t_{\mathrm{GUT}} \approx 10^{-36}$ s Hubbleovou konstantou $H_i \approx t_{\mathrm{GUT}}^{-1} \approx 10^{36}$ a tato fáze trvala $N \sim 100 H_i^{-1}$ (vyjádřeno v relativních jednotkách Hubbleova času během inflace. Z toho plyne

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \sim e^{100} \sim 10^{43}$$

Uvědomme si, že kosmologická konstanta Λ_i byla během inflační fáze mnohem větší než je kosmologická konstanta v současnosti, odhadem

$$\varepsilon_{\Lambda,i} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda_i = \frac{3c^2}{8\pi G}H_i^2 \sim 10^{105}\mathrm{TeV.m^{-3}}$$

což je oproti současné hodnotě $\varepsilon_\Lambda = 0.004\mathrm{TeV.m^{-3}}$ o 107 řádů větší. A jak tento scénář vysvětluje výše zmíněné problémy ?

0.2.1 Problém plochého vesmíru - inflace

Znovu se podívejme na Friedmanovu rovnici přepsanou s pomocí parametru Ω a za škálovací faktor dosaďme vztah pro obecnou komponentu jednosložkového vesmíru $a(t) \propto t^{2/(3+3w)}$. V případě, že $w \neq -1$ platí $H \propto t^{-1}$ a

$$|1 - \Omega_{\mathrm{tot}}(t)| \propto t^{2(1+3w)/(3+3w)}$$

tedy pro případ dominance záření se rozdíl zvětšuje, nicméně pro \$ w < -1/3\$ se rozdíl lineárně zmenšuje. Pokud se vesmír exponenciálně rozpíná, opět dosazením příslušného vztahu pro škalovacího faktoru a konstantní Hubbleovy konstanty plyne

$$|1 - \Omega_{\mathrm{tot}}(t_f)| \propto e^{-2N}|1 - \Omega(t_i)|$$

kde $t \equiv t_f = t_i + N/H_i$. Pokud byla hodnota rozdílu před inflací $|1 - |\Omega(t_i)| \sim 1$, pak po inflaci by rozdíl měl být

$$|1 - \Omega_{\mathrm{tot}}(t_f)| \propto e^{-2N} \sim e^{-200} \sim 10^{-87}$$

Vidíme, že i když by počáteční vesmír nebyl příliš plochý, inflační fáze jej extrémně zploští.

0.2.2 Problém horizontu - inflace

Pro vzdálenost pozorovatelného horizontu platí

$$d_{\mathrm{hor}} = a(t)\int_0^{t_0} \frac{c}{a(t)}$$

Uvedený vztah plyne z teorie relativity. Světlo se pohybuje po nulové geodetice, tedy platí

$$c\frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \mathrm{d}r$$

Vzdálenost galaxie ve vesmíru popsaném **RW metrikou** určíme

$$d_p(t_0) = a(t_0)\int_0^r \mathrm{d}r = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

Ale zpět k určení pozorovatelného horizontu. Pokud je dominantní složkou ve vesmíru záření, pak vztah dává dosazením průběhu škálovacího faktoru hodnotu

$$d_{\mathrm{hor}} = a_i c\int_0^{t_i} \frac{\mathrm{d}t}{a_i(t/t_i)^{1/2}} = 2ct_i$$

Na konci inflační fáze byla vzdálenost horizontu

$$d_{\mathrm{hor}} = a_i e^N c\left(\int_0^{t_i} \frac{\mathrm{d}t}{a_i(t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathrm{d}t}{a_i \exp\left(H_i(t - t_i)\right)}\right)$$

Pokud je N dostatečně velké pak můžeme pro vzdálenost pozorovatelného horizontu na konci inflace

$$d_{\mathrm{hor}}(t_f) = e^N c(2t_i + H_i^{-1})$$

Což pro náš výše zmíněný případ inflace v době t_{GUT} a tedy $N \approx 100$ dává pro hodnotu před inflací

$$d_{\mathrm{hor}}(t_i) = 2ct_i \approx 6.10^{-28}\,\mathrm{m}$$

a po skončení inflace hodnotu

$$d_{\mathrm{hor}}(t_f) \approx e^N 3ct_i \approx 2.10^{16}\,\mathrm{m} \approx 0.8\,\mathrm{pc}$$

Jinak řečeno, pokud by neexistovala inflace, byl by pozorovatelný horizont v době oddělení hmoty a záření pouhých $d_{\mathrm{hor}} \approx 0.4\,\mathrm{Mpc}$, díky inflaci však tento horizont narostl na $10^{43}\,\mathrm{Mpc}$, což bohatě stačí na to aby celá myšlená oblast posledního rozptylu byla v kauzálním kontaktu.

0.2.3 Problém magnetických monopólů

Pokud byly magnetické monopóly vytvířeny před nebo během inflace, tak díky této inflaci byla jejich číselná hustota zmenšena na nedetekovatelnou úroveň

$$n_m \propto a^{-3H_i t}$$

Opět pro náš případ inflace, pokud před inflací byla číselná hustota magnetických monopólů

$$n_m(t_{\mathrm{GUT}}) \propto 10^{82}\,\mathrm{m}^{-3}$$

pak díky inflaci byla výsledná hodnota

$$n_m(t_f) = e^{-300} n_M(t_{\mathrm{GUT}}) \approx 5.10^{-49}\,\mathrm{m}^{-3} \approx 15\,\mathrm{pc}^{-3}$$

pokud k tomu přidáme další rozpínání po inflační fázi dostáváme hodnotu

$$n_m(t_f) \approx 1.10^{-61}\,\mathrm{Mpc}^{-3}$$

Detekce jediného monopólu je astronomicky malá.

```
In [ ]:
```