In [17]:

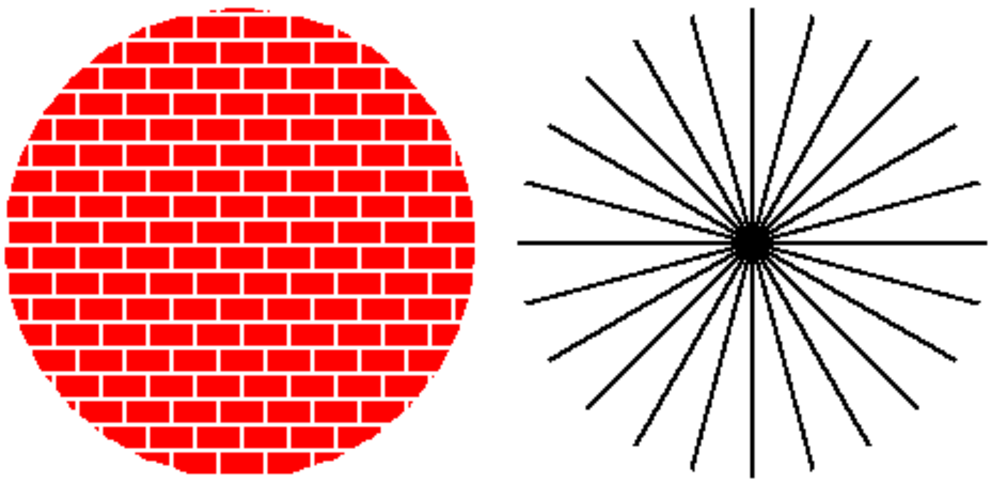
```
%matplotlib inline
from __future__ import division
import numpy as np
import scipy

from IPython.display import Image,display,Math,Latex
from sympy import *
from sympy.interactive import printing
printing.init_printing(use_latex=True)

Image(url='http://python.org/images/python-logo.gif')
```

```
<IPython.core.display.Image object>
```

Homogenita a izotropie

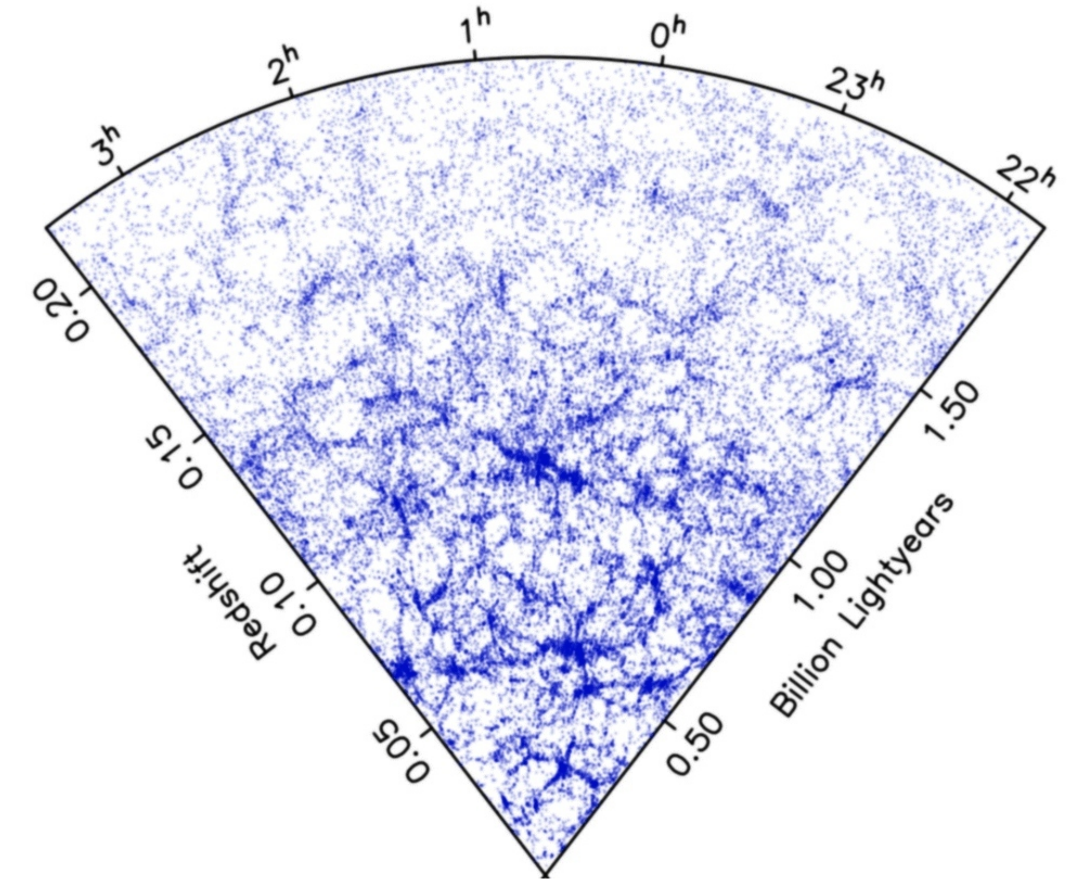
Prostor je

- homogenní, pokud jsou jeho vlastnosti ve všech bodech stejné
- izotropní, pokud jsou jeho vlastnosti ve všech směrech stejné



Kosmologický princip

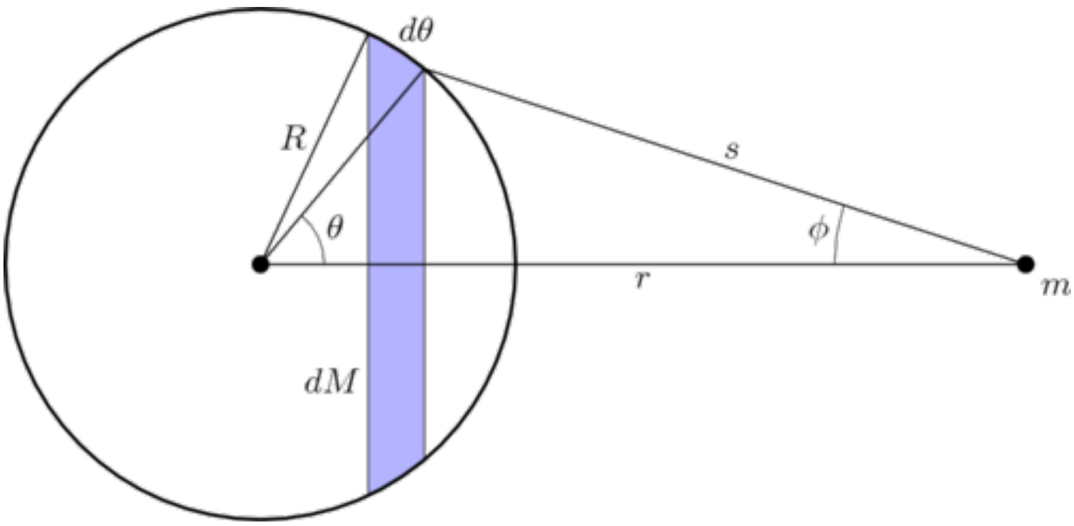
- Vesmír je všude homogenní a izotropní



Newtonův Slupkový teorém

1. Sféricky symetrické těleso gravitačně ovlivňuje vnější objekt tak jako by veškerá hmota byla koncentrována v jednom bodě.
2. Pokud se jedná o sféricky symetrickou slupku, pak na těleso nacházející se uvnitř slupky nepůsobí žádná gravitační síla, nezávisle na tom ve kterém místě uvnitř se nachází.

Těleso mimo slupku



Na obrázku je znázorněna jedna slupka o hmotnosti M. Pro určení velikosti gravitačního pole v bodě r od centra slupky nejprve slupku rozdělíme na sadu kruhových prstenců, každý v různé vzdálenosti s od testovací částice m. Hustota hmotnosti tenké slupky je určena podílem celkové hmotnosti slupky a plochou slupky $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$. Z toho lehce určíme celkovou hmotnost kruhového prstence

$$M_{ring} = \sigma 2\pi R \sin\theta R \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} M \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

Je nutné si uvědomit, že díky symmetrii problému má výsledné gravitační pole pouze radiální složku, jejíž velikost snadno určíme

$$\mathrm{d}E = \frac{GM \cos\phi \, \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{2s^2} = -\frac{GM \, \cos\phi \,\mathrm{d}(\cos\theta)}{2s^2}$$

S použitím kosinové věty můžeme vyjádřit vztahy mezi úhly a vzdálenostmi

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2rs \, \cos\phi \qquad s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \, \cos\theta$$

a tedy můžeme vyjádřit úhly

$$\cos\phi = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs} \qquad \cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - s^2}{2Rr}$$

a diferenciál

$$-d(\cos\theta) = \frac{s}{Rr}\mathrm{d}s$$

Nyní nám již nic nebrání dosadit předchozí výrazy do vztahu pro intenzitu gravitačního pole v bodě m od jednoho prstence

$$\mathrm{d}E = \frac{GM(s^2 + r^2 - R^2)}{4Rr^2 s^2}\,\mathrm{d}s$$

Celková intenzita gravitačního pole, kterou působí slupka na testovací částici je dána součtem příspěvku od všech prstenců, tedy integrálem

$$E = \int_{s=r-R}^{s=r+R} \mathrm{d}E = \frac{GM}{4Rr^2} \int_{s=r-R}^{s=r+R} \frac{s^2 + r^2 - R^2}{s^2} \mathrm{d}s$$

Pro výpočet můžeme s výhodou a pro tu legraci použít balíček SymPy

In [18]:
```
s, R, r, G, M = symbols('s R r G M')
init_printing(use_latex=True)
expr = G*M/(4*R*r**2)*Integral((s**2+r**2-R**2)/s**2, (s, r-R, r+R))
display(Math(latex(expr)))
```

$$\frac{GM}{4Rr^2} \int_{-R+r}^{R+r} \frac{1}{s^2}\left(-R^2 + r^2 + s^2\right) \, ds$$

In [19]:
```
E = G*M/(4*R*r**2)*Integral((s**2+r**2-R**2)/s**2, (s, r-R, r+R))
init_printing(use_latex=True)
display(Math(latex(simplify(E.doit()))))
```

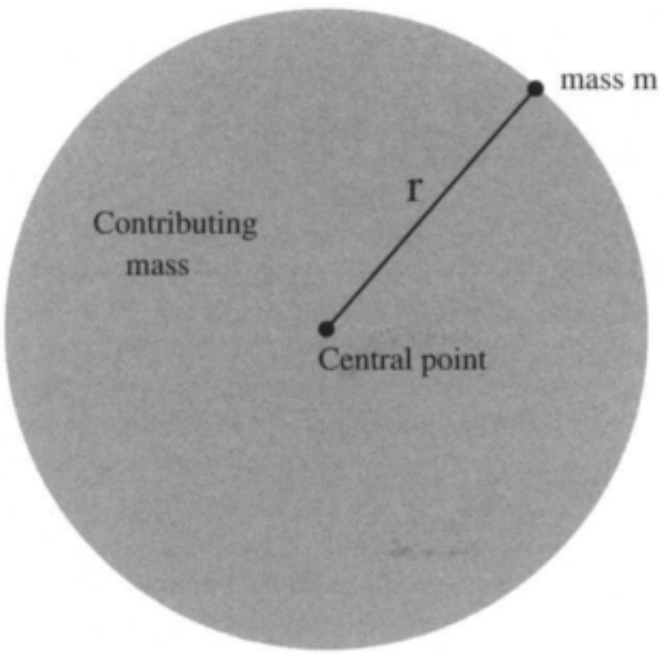
$$\frac{GM}{r^2}$$

Z výsledku je tedy jasné, že gravitační silové působení sféricky symetrické slupky na částici, nacházející se vně slupky ve vzdálenosti r od středu slupky je ekvivalentní gravitačnímu působení hmotné částice o hmotnosti slupky M umístěné ve středu slupky.

Uvnitř slupky.

Nic není zadarmo, ani vědomosti. Tuto část důkazu nechť si udělá každý sám obdobným způsobem

Semiklasický model vesmíru



V následující pasáži si odvodíme Friedmannovu rovnici, která popisuje rozpínání vesmíru. Jedná se o nejdůležitější rovnici v kosmologii. Vycházíme z platnosti kosmologického principu, který mimo jiné říká, že ve vesmíru neexistuje privilegovaný bod. Představme si tedy v našem izotropním a homogenním vesmíru (kosmologický princip) libovolnou izotropně rozpínající se kouli o poloměru r, která ohraničuje hmotu o hustotě ρ. Na hranici této koule mějme testovací částici m, na kterou působí gravitační síla hmoty, kterou tato hypotetická koule obepíná.

Platí zákon zachování energie

$$U = T - V$$

pčřičem si vyjádříme jak kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

tak potenciální energii

$$V = -G\frac{mM}{r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho r^2 m,$$

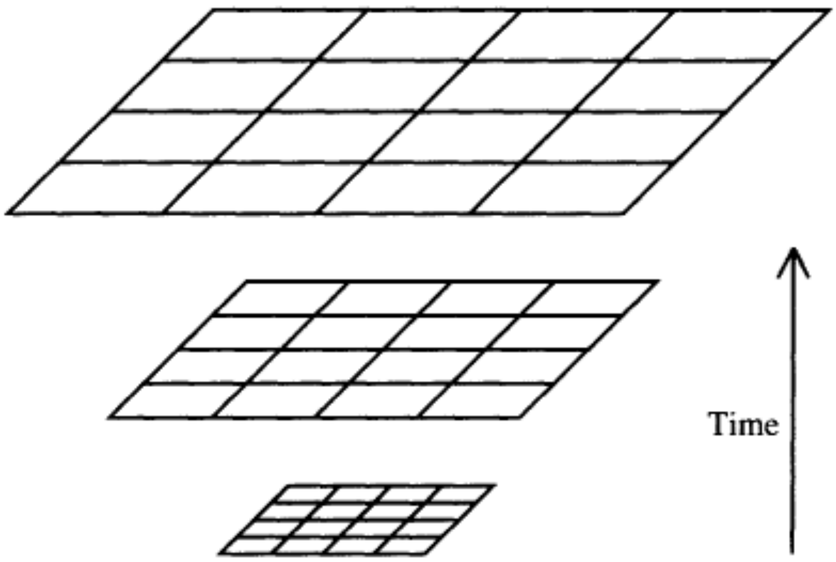
kde jsem využili vztahu mezi hmotností a hustotou koule

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Pro celkovou energii koule dostáváme výsledně

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho r^2 m.$$

Je důležité si uvědomit, že rovnice nám popisuje vývoj vzdálenosti mezi dvěma body našeho vesmíru. Navíc z kosmologického principu pak plyne, že tato rovnice platí mezi libovolnými dvěma body. Můžeme tak použít speciální typ souřadnic - ***comoving coordinates*** - při kterém je souřadný systém spjat se samotnou expanzí vesmíru



Skutečná vzdálenost mezi dvěma body (např. galaxiemi) a vzdálenost v souřadném systému ***comoving coordinates*** spjata vztahem $\vec{r} = a(t)\vec{r_0}$, kde $a(t)$ je **škalovací faktor**. Je důležité si uvědomit rozdíl mezi dvěma různými souřadnicemi

- Původní souřadný systém který neexpanduje - poloha dvou galaxií vyjádřená pomocí těchto fyzikálních souřadnic se zvětšuje
- Expandující souřadný systém - fixní souřadný systém, při kterém poloha dvou galaxií zůstává stejná

S použitím nové vztažné soustavy pro naši rozpínající se kouli můžeme zákon zachování rozepsat

$$U = \frac{1}{2}m(\dot{a})^2 r_0^2 - \frac{4}{3}\pi a^2 r_0^2 \rho m,$$

následně podělením rovnic výrazem $ma^2 r_0^2$ a vynásobením 2 dostáváme

$$\frac{2U}{mr_0^2 a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho$$

Faktor na pravé straně $\frac{2U}{mr_0^2}$ je konstantní a nezávisí na čase. Označme jej jako $kc^2 = \frac{2U}{mr_0^2}$, kde c^2 je kvadrát rychlosti světla. Po této substituci, jejíž důvod bude jasnější později a přehození členů dostáváme již tvar shodný se slavnou **I. Friedmannovou rovnicí**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

Rovnice pro tekutinu

Friedmanova rovnice nám udává, jak se vyvíjí škalovací faktor v závislosti na čase a hmotě ve vesmíru. Nicméně k jejímu řešení ještě potřebujeme znát, jak se mění s časem hustota ve vesmíru. Tak se dostáváme k rovnici pro tekutinu (hmotu ve vesmíru můžeme považovat za tekutinu viz. kosmologický princip). Odvození je jednoduché a vyjdeme ze ***I. Termodynamického zákona***

$$\mathrm{dU} + \mathrm{pdV} = \mathrm{TdS}$$

Vyjdeme opět z představy již výše zmíněné koule (pro jednoduchost s jednotkovým poloměrem $r_0 = 1$) ohraničující tekutinu. Energie v tomto objemu vyjádřeném s pomocí škálovacího faktoru a

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

je dána

$$U = V\rho c^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2$$

Změna energie a objemu za jednotku času je dána časovou derivací

$$\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dt}} = 4\pi a^2 \dot{a}\rho c^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \dot{\rho}, \quad \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = 4\pi a^2 \dot{a}$$

Předpokládejme, že expanze vesmíru je vratný adiabatický děj, tedy platí $\mathrm{dS} = 0$. První termodynamický zákon můžeme přepsat s použitím výše uvedených vzorců

$$4\pi a^2 \dot{a}\rho c^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \dot{\rho} + p4\pi a^2 \dot{a} = 0$$

což po úpravách vede k **rovnici pro tekutinu**

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

Povšimněme si členů v závorce, první nám vyjadřuje změnu hustoty v důsledku zvětšení objemu, zatímco druhý příspěvek popisuje úbytek energie v důsledku vykonané práce. Je třeba si však uvědomit podstatnou věc, v důsledku kosmologického principu neexistuje ve vesmíru gradient tlaku, tedy nelze uvažovat tlakové síly. Nemůžeme tedy tvrdit, že vesmír se rozpíná v důsledku tlakových sil. Abychom si lépe představili co se děje uvnitř námi zkoumané oblasti, musíme si uvědomit, že záření a částice vyvíjejí tlak na hranicích zkoumané oblasti. To má za následek úbytek energie částic i záření - byla vykonána práce. Námi zkoumaná oblast je malá reprezentativní část vesmíru, uplně stejný argument platí o všech oblastech v celém vesmíru. Částice i záření ze sousedních oblastí působí tlakem na hranice své oblasti a to navzájem, nezískávají však energii od těch druhých, v obou případech expandují a energii ztrácejí.

Máme tedy již dvě rovnice, ale neznáme veličiny jsou tři $a(t), \rho(t), p$. Chybí nám tedy specifikace posledního vztahu.

Stavová rovnice

$$p = \rho(p)$$

Konkrétní vztah záleží vždy na typu hmoty, který je ve vesmíru obsažen, jak si ukážeme později.

Rovnice pro zrychlení

Může být užitečné kromě závislosti $a(t), \dot{a}(t)$ i druhou derivaci $\ddot{a}(t)$, tedy zrychlení škalovacího faktoru. Toho lze dosáhnout kombinací Friedmanovy rovnice a rovnice pro tekutinu. Dostaneme rovnici, která nebude sice nezávislá, ale bude nám vyjadřovat zrychlení $\ddot{a}(t)$. Nejprve zderivujeme podle času ***Friedmanovu rovnici***

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8}{3}\pi G\dot{\rho} + 2kc^2\frac{\dot{a}}{a^3},$$

a za časovou derivaci hustoty $\dot{\rho}$ dosadíme výraz z rovnice pro tekutinu

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8}{3}\pi G\left(-3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\right) + 2kc^2\frac{\dot{a}}{a^3}$$

podělením výrazem $2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ dostaneme

$$\left(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}\right) = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2}$$

opětovným použitím ***Friedmannovy rovnice*** dostaneme dostaneme výslednou **rovnici pro zrychlení**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

Podívejme se nyní na rovnici trochu podrobněji. Pokud bude mít hmota kladný nenulový tlak, dojde ke zpomalení expanze vesmíru. Můžeme si to představit tak, že tlak je určitá forma energie, tedy hmoty,což má za následek zvýšení gravitační síly působící proti expanzi. Z tohoto důvodu můžete někdy ***Friedmannovy rovnice*** vidět také přepsané s pomocí hustoty energie $\varepsilon = \rho c^2$ namísto hustoty ρ. A poslední věc na kterou je třeba upozornit, je časté použití speciálních jednotek v kosmologii, kdy rychlost světla $c = 1$. V takovém případě hustota energie ε a ρ spolu splývají.