

# Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření

V úvodní části [1] volného cyklu článků byl uveden stručný přehled problematiky nejistot v měření, přiblížen historický vývoj v této oblasti a naznačeny důvody a výhody používání současné kodifikace v širších souvislostech mezinárodní metrologie. Tento článek se zaměřuje na základní problémy méně náročných případů, za které lze považovat především jednodušší přímá měření, u nichž není třeba uvažovat další kovarianční vlivy.

## Úvod

Nejistota měření (dále většinou jen nejistota) je parametrem, který bezprostředně souvisí s výsledkem měření, neboť vymezuje interval, v němž lze s určitou pravděpodobností předpokládat výskyt skutečné hodnoty měřené veličiny. Nejistota odráží veškeré nedokonalosti stanovení výsledku měření, jak je přiblížil přehled zdrojů nejistot v [1].

Následující text bude věnován základnímu modelu stanovení výsledku, tj. odhadu hodnoty měřené veličiny a jeho nejistoty, z jednoduchých opakovaných přímých měření.

## 2. Stanovení standardních nejistot při přímém měření

### 2.1 Výpočet standardní nejistoty typu A

Jak již bylo uvedeno v [1], je výpočet standardní nejistoty typu A založen na statistické analýze naměřených údajů. U opakovaných přímých měření jde o běžné statistické zpracování hodnot měřené veličiny získaných opakovanými přímými měřeními, jichž by mělo být alespoň deset. Předpokládá se přitom, že měření jsou navzájem nezávislá a uskutečněná za stejných podmínek. Je tedy k dispozici  $n$  naměřených údajů  $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n$ , které jsou výsledkem reali-

$$u_A(x) = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

Vztah (2) lze k výpočtu nejistoty použít jen tehdy, byl-li vykonán dostatečný počet měření ( $n \geq 10$ ). Při malém počtu měření ( $n < 10$ ), je-li měřicí proces statisticky řízen (viz např. v [1] uvedená literatura [9], [10], [11]) a je-li k dispozici tzv. průřezový rozptyl, který charakterizuje rozptýlení řízeného měřicího procesu, se standardní nejistota typu A určí podle vztahu

$$u_A(x) = \frac{s_{pr}}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

kde

$s_{pr}^2$  je známý průřezový rozptyl,  
 $n$  počet měření.

Pro sérii opakovaných měření s jinými než uvedenými vlastnostmi se výsledek počítá podle jiného vztahu než (1) – např. pro nestejně přesná opakovaná měření jím bude vážený aritmetický průměr – a také pro standardní nejistotu bude platit jiný vztah než (2). V takových případech je vhodné konzultovat celou situaci se statistikem.

### 2.2 Výpočet standardní nejistoty typu B

#### 2.2.1 Rámcový postup

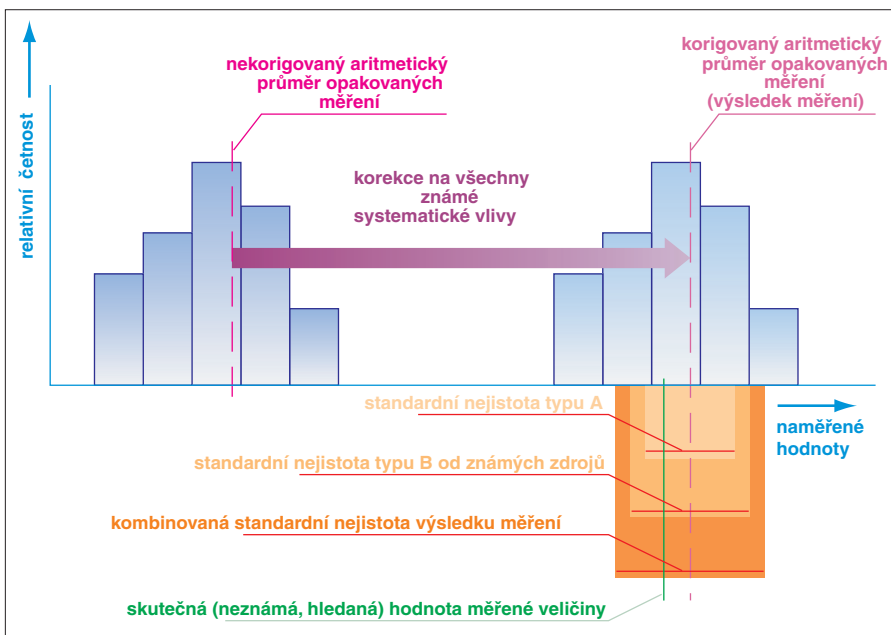
Nejistoty zjišťované metodou B jsou vázány na známé, identifikovatelné a kvantifikovatelné zdroje. Výpočet nejistot typu B vychází z kvalifikovaného úsudku založeného na všech dostupných informacích o měřené veličině  $X$  a jejich možných změnách. Jako zdroje informací k určení nejistoty typu B mohou posloužit:

- předcházející měření a jejich výsledky;
- zkušenosti a všeobecné znalosti o chování měřeného objektu, měřicích metodách, měřicích prostředcích a podmínkách měření;
- informace o měřicích prostředcích a podmínkách jejich použití získané od výrobců;
- údaje z certifikátů, kalibračních listů, ověřovacích listů apod.;
- nejistoty referenčních údajů převzatých z různých pramenů.

Do jaké míry budou tyto informace oceněny a využity, závisí zvláště na zkušenosti obsluhy, na hloubce všeobecných znalostí i rutině a praxi experimentátora, protože charakter problému neumožňuje detailně specifikovat jednotný postup.

Rámcový postup při určování nejistot typu B je takovýto:

1. Vytipují se možné zdroje  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p, \dots, Z_n$  nejistot, jak bylo uvedeno v předcházejícím textu.



Obr. 1. Grafické znázornění vztahu mezi výsledky opakovaných měření a nejistotou měření

V praxi se lze asi velmi zřídka setkat s touto skupinou nejistot samostatně. Za typický příklad je možné považovat způsob určování hodnoty měřené veličiny pomocí opakovaného měření. Tomuto modelu odpovídá situace, kdy podstatnou část celkové nejistoty tvoří nejistota vyhodnocovaná metodou A, tj. statisticky (nejistota typu A). Nepominutelný je přitom ovšem podíl nejistot zjišťovaných metodami B (nejistota typu B), tj. takových, které jsou do procesu měření vnášeny jinými cestami, např. systematickými vlivy apod. Situaci typického rozložení naměřených hodnot měřené veličiny, která připomíná analogii s tradičními přístupy k vyhodnocování chyb měření, přibližuje obr. 1.

zace  $n$  nezávislých a stejně přesných měření jedné veličiny. Příkladem může být opakované měření průměru válečku, hřídele apod. ve stejném místě (průřezu), stejným měřidlem a toutéž osobou za nezměněných okolních podmínek. Potom je základní výsledek měření (odhad hodnoty měřené veličiny) představován aritmetickým průměrem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Standardní nejistota typu A tohoto výsledku, která se značí  $u_A(x)$ , se rovná směrodatné odchylce aritmetického průměru  $s_{\bar{x}}$  tedy

2. Určí se standardní nejistota vlivem každého zdroje buď převzetím z certifikátů, technické dokumentace, tabulek, technických norem, kalibračních listů apod., nebo odhady pomocí metod uvedených dále v této kapitole.

3. Posoudí se korelace mezi jednotlivými zdroji.

4. Určí se vztah mezi veličinou  $X$  a jednotlivými zdroji  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p$  (charakterizovanými veličinami  $Z_j$ )

$$X = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p) \quad (4)$$

5. S použitím zákona šíření nejistot podle vztahu (12) se pro funkci (4) vypočítá nejistota  $u_B(x)$ .

Není-li známa přímo standardní nejistota vlivem příslušného zdroje, mohou nastat různé situace, z nichž některé jsou uvedeny v následujících odstavcích.

Je třeba upozornit, že dále zmíněné metody k vyhodnocení standardní nejistoty typu B neobsáhnou veškeré možné případy praxe. Ta bývá podstatně různorodější, a proto je velmi důležité v každém jednotlivém případě důsledně zvážit veškeré okolnosti, které se mohou projevit jako zdroj nejistot, i charakter jejich působení na výsledek měření.

### 2.2.2 Známé $U$ a $k_r$

Uvádějí-li certifikáty, dokumentace výrobců nebo jiné prameny rozšířenou nejistotu  $U$  a koeficient rozšíření  $k_r$ , stanoví se standardní nejistota  $u_B(z_j)$  vlivem daného zdroje  $Z_j$  podle vztahu

$$u_B(z_j) = \frac{U}{k_r} \quad (5)$$

### 2.2.3 Známé rozpětí normálního rozdělení

Je-li známo rozpětí (délka intervalu  $2U$ ), v němž se může nacházet většina naměřených hodnot (např. 95 %, 99 % nebo 99,73 %), a je oprávněný předpoklad, že při určování tohoto intervalu bylo uvažováno normované normální rozdělení, lze standardní nejistotu  $u_B(z_j)$  vlivem daného zdroje  $Z_j$  určit ze vztahu

$$u_B(z_j) = \frac{U}{k_p} \quad (6)$$

kde  $k_p$  je koeficient rozšíření rovný kvantilu normovaného normálního rozdělení pro pravděpodobnost  $P$  ( $k_p = 1,96$  pro  $P = 95 \%$ ,  $k_p = 2,58$  pro  $P = 99 \%$ ,  $k_p = 3$  pro  $P = 99,73 \%$  atd.).

### 2.2.4 Známé hranice vlivu zdroje

Není-li možné odhadnout jen hranice, ve kterých se hodnoty měřené veličiny nacházejí vlivem působení daného zdroje, a to téměř s jistotou („téměř na 100 %“), postupuje se takto:

- odhadnou se hodnoty změn (odchylek)  $\pm z_{jmax}$  od jmenovité (nominální) hodnoty měřené veličiny příslušející zdroji  $Z_j$ , jejichž překročení je málo pravděpodobné (téměř nemožné);

- posoudí se rozdělení pravděpodobnosti odchylek v tomto intervalu a určí se jeho aproximace;

- standardní nejistota  $u_B(z_j)$  se vypočítá ze vztahu

$$u_B(z_j) = \frac{z_{jmax}}{k} \quad (7)$$

kde  $k$  je hodnota příslušná ke zvolené aproximaci rozdělení pravděpodobnosti podle obr. 2, který také celou situaci použití pravděpodobnostních modelů používaných pro stanovení nejistot podle příslušného zákona rozdělení přehledně přibližuje.

Rozdělení	$z_{max}$	$k$	Rozdělení	$z_{max}$	$k$
 normální (Gaussovo)	$a$	3	 rovnoměrné - pravouhlé	$a$	$\sqrt{3}$ 1,73
 trojúhelníkové (Simpsonovo)	$a$	$\sqrt{6}$ 2,45	 bimodální (trojúhelníkové)	$a$	$\sqrt{2}$ 1,41
 lichoběžníkové	$a$	2,32 při $b = \frac{a}{3}$	 bimodální (Diracovo)	$a$	1
	$a$	2,19 při $b = \frac{a}{2}$			
	$a$	2,04 při $b = \frac{2a}{3}$			

Obr. 2. Rozdělení pravděpodobnosti a koeficienty  $k$

Aproximace normálním rozdělením se použije tehdy, mohou-li se častěji vyskytovat malé odchylky od jmenovité hodnoty, zatímco s rostoucí velikostí odchylek pravděpodobnost jejich výskytu klesá (např. je-li zdrojem nejistoty měřicí přístroj od spolehlivého výrobce, u něhož lze předpokládat, že většina přístrojů bude zdrojem pouze malých chyb).

Rovnoměrné rozdělení se použije v případech, kdy je stejná pravděpodobnost výskytu kterékoli odchylky v celém daném intervalu  $\pm z_{jmax}$ . Tato aproximace se v běžné praxi využívá nejčastěji. Především proto, že většinou nejsou k dispozici dostatečné poznatky o rozdělení pravděpodobnosti výskytu odchylek, a tudíž není důvod dávat některým odchylkám přednost tím, že se použije jiný typ rozdělení.

Trojúhelníkové rozdělení se používá k modelování situace v případech velmi podobných normálnímu rozdělení.

Bimodálním rozdělením se aproximuje průběh nejistot např. u těch měřicích přístrojů, které výrobce rozděluje do jistých tříd přesností, a tedy u některé střední třídy se nemohou vyskytovat přístroje ani s malými chybami (ty budou zařazeny do předcházející – přesnější třídy), ani s velkými chybami (ty budou naopak v následující – méně přesné třídě).

### 2.2.5 Použití číslicového měřicího přístroje

Při použití číslicového měřicího přístroje je jedním ze zdrojů nejistoty rozlišitelnost po-

slední platné číslice. Přes neměnnost údaje při opakovaném měření není v tomto případě nikdy nejistota nulová. Při jejím odhadu se použije model rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti v intervalu, který je vymezen rozlišovací schopností  $\delta(z_j)$  daného přístroje, a platí

$$u_B(z_j) = \frac{\delta(z_j)}{2\sqrt{3}} = 0,29\delta(z_j) \quad (8)$$

Ukazuje-li např. číslicový voltmetr opakovaně 12,14 V a přitom je definováno rozlišení 10 mV i přesnost 10 mV, lze předpokládat, že  $\delta(z_j) = 0,01$  V a nejistota  $u_B(z_j) = 0,003$  V. Dočte-li se ale uživatel v technických podmínkách podobného voltmetru, že pro použitý měřicí rozsah 20 V platí při rozlišení 10 mV (hodnota jednoho digitu) přesnost 0,3 % naměřené hodnoty + 1 digit, pak  $\delta(z_j) = (0,036 + 0,01)$  V = 0,046 V

a příslušná složka nejistoty typu B bude  $u_B(z_i) = 0,013$  V, což je asi 4,5 krát větší nejistota než v předchozím případě.

### 2.2.6 Použití analogového přístroje se stupnicí

Při použití analogového měřicího přístroje je schopnost odečítání často dána hodnotou dílku stupnice  $\delta(z)$ . Potom se standardní nejistota způsobená čtením naměřené hodnoty určí podle vztahu (8).

U některých analogových měřicích přístrojů jsou velikosti intervalu sloužícího jako předpokládaný zdroj nejistoty určeny ve vztahu k dílku stupnice normou nebo jiným doporučujícím předpisem. Obecně se při návrhu analogové stupnice předpokládá, ve vztahu k rozlišovací schopnosti lidského oka, že tzv. střední stupnice má dílek dlouhý asi 1 mm a přesnost čtení pouhým okem (bez lupy nebo jiných pomůcek) je  $\pm 0,5$  dílku u laiků a  $\pm 0,3$  až  $\pm 0,25$  dílku u zručně zaškolené obsluhy. Tak zvané jemné stupnice, které se pro čtení „pouhým okem“ používají méně často, mají dílek dlouhý asi 0,5 mm a odhad poloviny dílku je zpravidla vázán na patřičnou zručnost a trénovanost obsluhy.

### 2.2.7 Přítomnost hystereze

Často je charakteristika přístroje zatížena nezanedbatelnou hysterezí. Při výpočtu nejistoty způsobené tímto zdrojem se postupuje podobně jako v případě popsaném v odst. 2.2.6 s použitím vztahu (8).

## 2.3 Standardní kombinovaná nejistota

V praxi je obvykle třeba společně jedním číslem vyjádřit nejistoty typu A (označované  $u_A$ ) a nejistoty typu B ( $u_B$ ). K tomu se používá celková nejistota, obvykle nazývaná kombinovaná nejistota a označovaná  $u_C$ , která se určuje podle vztahu

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \quad (9)$$

jak ostatně naznačila již minulé část tohoto cyklu [1] s odvoláním na prameny [1], [2], [9], [10], [11], jež jsou v ní uvedeny.

## 2.4 Rozšířená nejistota

Výsledek měření ve tvaru  $y \pm u_C$  definuje skutečnou hodnotu měřené veličiny s poměrně malou pravděpodobností, přibližně 60%. Tato pravděpodobnost je většinou nedostatečná. Proto je snaha stanovit interval, ve kterém se hodnota nachází s pravděpodobností blízkou ke 100 %. Do praxe se tudíž zavádí tzv. rozšířená nejistota  $U$ , definovaná jako  $U = k_f u_C$ , kde  $k_f$  je koeficient rozšíření. Hodnota  $k_f$  závisí na typu rozdělení pravděpodobnosti výsledku měření. V praxi se používají různé hodnoty koeficientů rozšíření podle typu rozdělení a požadované hodnoty pravděpodobnosti. Velmi častým případem je 95% pravděpodobnost (tzv. konfidenční), že skutečná

hodnota se nachází v intervalu  $y \pm U$ . V případě normálního rozdělení výsledků měření odpovídá pravděpodobnosti 95 % hodnota  $k_f = 2$ . Vychází-li se z teorie matematické statistiky, je možné předpokládat normální rozdělení velmi často. Proto se v praxi také nejčastěji pracuje s  $k_f = 2$ .

## 3. Zákon šíření nejistot aplikovaný na jednodušší případy měření

Připomeňme si zde znovu a poněkud podrobněji problematiku šíření nejistot, pro potřeby dalších úvah kombinovanou s náznamem složitější teorie matematických modelů měření. Základní otázkou při určování postupu výpočtu nejistot měření je, jak stanovit nejistotu odhadu hledané veličiny, která je funkcí jiných veličin, jejichž odhady i nejistoty jsou známy.

V případě, že je zájem upřen na jednu veličinu  $Y$  (výstupní veličina), která je funkcí  $m$  veličin  $X_1, X_2, \dots, X_q, \dots, X_m$  (vstupní veličiny), jejichž odhady, nejistoty a popř. i vzájemné kovariance jsou známy, je možné zapsat vztah

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_q, \dots, X_m) \quad (10)$$

kde  $f$  je známá funkce.

Odhad  $y$  hodnoty výstupní veličiny  $Y$  lze stanovit ze vztahu

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_q, \dots, x_m) \quad (11)$$

kde  $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots, x_m$  jsou odhady vstupních veličin  $X_1, X_2, \dots, X_q, \dots, X_m$ .

Nejistota odhadu  $y$  veličiny  $Y$  v případě, že odhady  $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots, x_m$  jsou nekorelované (což zatím není předpokládáno), se určí ze vztahu

$$u^2(y) = \sum_{q=1}^m A_q^2 u_q^2(x) \quad (12)$$

kde  $A_q$  jsou koeficienty citlivosti, pro něž platí

$$A_q = \left. \frac{\partial f(X_1, \dots, X_m)}{\partial X_q} \right|_{X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m} \quad (13)$$

Protože pro současné úvahy o přímých měřeních se vystačí právě s těmito čtyřmi vztahy (10) až (13), lze ponechat složitější teorie nepřímých měření včetně vzájemných korelací a kovariancí na později.

## 4. Zaokrouhlování výsledků měření

Zejména při práci s chybami a nejistotami měření se lze velmi často setkat také s úkolem správně zaokrouhlit získané výsledky. Aplikací různých matematických vztahů, zejména při statistickém vyhodnocování, se pomocí výpočetní techniky získají výsledky představované dlouhými řetězci číslic. Takový výsledek je však z technického hlediska nesmyslem a pro praxi nemá význam. Mno-

honásobným opakováním měření lze reálně zpřesnit získaný odhad měřené veličiny celkem běžně o jeden, maximálně o dva řády oproti úrovni zobrazovací jednotky, nikoli však v rozsahu všech desetinných míst, která nabídne kalkulačka nebo počítačový program.

Zaokrouhlení tak představuje záměnu daného čísla jiným, které se nazve číslem zaokrouhleným. Zaokrouhlené číslo se vybírá z řady celistvých násobků zvoleného zaokrouhlovacího intervalu. Třeba pro interval zaokrouhlení 0,1 jsou celistvými násobky např. 33,1; 33,2; 33,3; 33,4; 33,5; 33,6; 33,7; 33,8; 33,9. Pro interval zaokrouhlení 10 lze např. uvést číselnou řadu 1 510; 1 520; 1 530; 1 540; 1 550; 1 560; 1 570; 1 580; 1 590; 1 600 atd.

Při zaokrouhlování se pro prezentaci výsledku vybere ten celistvý násobek, který je k danému číslu nejbližší. Jestliže ale dojde k tomu, že oba celistvé násobky jsou od zaokrouhlovaného čísla stejně vzdáleny, jsou možné dvě varianty řešení:

1. Za zaokrouhlené číslo se zvolí sudý celistvý násobek. Těto variantě se při vyhodnocování měření dává přednost, takže např. pro interval zaokrouhlení 1 se čísla 13,5 i 14,5 zaokrouhlí na 14.
2. Za zaokrouhlené číslo se zvolí větší celistvý násobek, což je varianta rozšířenější při použití výpočetní techniky. Pro předcházející případ se tak zaokrouhlením 13,5 dostane číslo 14, zatímco zaokrouhlením 14,5 již číslo 15.

V praxi je třeba věnovat velkou pozornost zejména případům, kdy se zaokrouhluje opakovaně, protože několikrát zaokrouhlením je možné dojít ke značnému zkreslení výsledku a podstatnému nárůstu chyby.

## 5. Jak uvádět výsledky měření

### 5.1. Pravidla

Pravidla uvádění výsledku měření upravuje např. v [1] uvedená literatura [2], kde se doporučují dva způsoby, buď s použitím standardní kombinované nejistoty, nebo pomocí rozšířené nejistoty. Současně lze použít také tzv. bilanční tabulku.

### 5.2 Standardní nejistota kombinovaná $u_C$

V případě, že se zvolí prezentaci výsledku se standardní nejistotou kombinovanou  $u_C$ , je třeba dodržet tato pravidla:

- uvést podrobnou definici měřené veličiny  $Y$ ;
- uvést odhad  $y$  měřené veličiny  $Y$  spolu s kombinovanou standardní nejistotou  $u_C(y)$  a jednotku, ve které jsou odhad i nejistota uvedeny;
- je-li to vhodné, uvést relativní standardní kombinovanou nejistotu  $u_C(y)/|y|$ ,  $|y| \neq 0$ ;
- v případě potřeby uvést bilanční tabulku (kap. 5.4).

Jako příklad může posloužit zápis výsledku určování hmotnosti závaží s nominální hodnotou  $m = 100$  g. Při kombinované nejistotě

$u_c = 0,35$  mg lze výsledek zapsat některým z těchto způsobů:

- $m = 100,021\ 47$  g s  $u_c = 0,35$  mg;
- $m = 100,021\ 47$  (35) g, kde číslo v závorce představuje číselnou hodnotu kombinované standardní nejistoty  $u_c$  s dekadickým řádem shodným s řádem posledních dvou číslic zapsaného výsledku;
- $m = 100,021\ 47$  (0,000 35) g, kde číslo v závorce představuje číselnou hodnotu kombinované standardní nejistoty vyjádřenou v jednotce, ve které je zapsán výsledek;
- $m = (100,021\ 47 \pm 0,000\ 35)$  g, kde číslo následující po značce  $\pm$  představuje číselnou hodnotu kombinované standardní nejistoty  $u_c$ , a nikoliv konfidenční interval (tento zápis se nedoporučuje používat při zápisu výsledku měření s kombinovanou standardní nejistotou, protože se používá přednostně při zápisu výsledku měření s rozšířenou nejistotou).

### 5.3 Rozšířená nejistota $U$

Při uvádění výsledku měření s použitím rozšířené nejistoty  $U = k_f u_c$  je třeba:

- uvést podrobnou definici měřené veličiny  $Y$ ;
- uvést výsledek měření v podobě  $Y = y \pm U$ , přičemž je třeba uvést jednotky, v nichž jsou vyjádřeny odhad  $y$  i nejistota  $U$ ;
- pokud je to vhodné, uvést relativní rozšířenou nejistotu  $U/|y|$ ,  $|y| \neq 0$ ;
- uvést hodnotu koeficientu rozšíření  $k_f$  použitou při výpočtu  $U$ ;
- uvést konfidenční hladinu spjatou s intervalem  $y \pm U$  a uvést, jak byla určena;
- v případě potřeby uvést bilanční tabulku (kap. 5.4).

Použijí-li se údaje z předchozího příkladu (kap. 5.2), je možné psát  $m = (100,021\ 47 \pm 0,000\ 70)$  g, kde číslo následující po značce  $\pm$  představuje číselnou hodnotu kombinované standardní nejistoty  $U$ , přičemž nejistota  $U$  byla určena z kombinované standardní nejistoty  $u_c$  a koeficientu rozšíření  $k_f = 2$  (podle vysvětlení v kap. 2.4). Podrobněji se k situaci vrátíme v dalších částech cyklu, popř. lze použít literaturu citovanou v [1] jako položka [2].

Tab. 1. Obecná podoba bilanční tabulky

Veličina $X_q; Y$	Odhad $x_q; y$	Standardní nejistota $u_q(x)$	Typ rozdělení	Koeficient citlivosti $A_q$	Příspěvek ke standardní nejistotě $u_q(y)$ ; nejistota $u(y)$
$X_1$	$x_1$	$u_1(x)$	podle situace	$A_1$	$u_1(y)$
$X_2$	$x_2$	$u_2(x)$		$A_2$	$u_2(y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$X_q$	$x_q$	$u_q(x)$		$A_q$	$u_q(y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$X_m$	$x_m$	$u_m(x)$		$A_m$	$u_m(y)$
$Y$	$y$	-	-	-	$u(y)$

Tab. 2. Naměřené hodnoty průměru válečku

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ (mm)	80,1	80,2	80,1	79,9	80,0	80,2	80,1	79,9	80,0	80,1

### 5.4 Bilanční tabulka

Kromě běžného zápisu výsledku měření v podobě aritmetického průměru s nejistotou jako tolerančním pásmem je v mnoha předpisech ([1], literatura citovaná ad [3], [4]) doporučován zápis postupu určení výsledné nejistoty měření do tzv. bilanční tabulky (tab. 1), přičemž platí

$$u_q(y) = A_q u_q(x); u(y) = \sqrt{\sum_{q=1}^m u_q^2(y)} \quad (14)$$

### 6. Příklady stanovení nejistoty

Podle slibu v [1] bude v dalším textu ukázán postup určení nejistoty na dvou jednoduchých typických příkladech přímého měření délky.

#### Příklad 1

Úkolem je změřit průměr  $d$  válečku, jehož jmenovitá hodnota je 80 mm, pomocí běžného posuvného měřítka. Měření se opakuje desetkrát za stejných podmínek. Z certifikátu a dalších dostupných materiálů vyplývá, že posuvné měřítko má v intervalu měřených délek 0 až 150 mm základní chybu rozlišení 0,05 mm. Současně se uplatní integrovaná osobní chyba obsluhy při čtení ze stupnice měřítka (paralaxa), nedokonalosti osvětlení, způsobující nedokonalou koincidence rysek, nedokonalost kolmého ustavení měřidla vůči ose válce, kolísání síly stisku atd., což se vše dohromady zahře do celkové osobní chyby s velikostí 0,1 mm.

Opakovanými měřeními průměru válečku byly získány hodnoty  $d_i$  uvedené v tab. 2.

Odhadem hodnoty měřené veličiny (průměru válečku  $d$ ) je aritmetický průměr. Podle (1) se dostane

$$\bar{d} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_i = 80,06 \text{ mm}$$

Standardní nejistota typu A je výsledkem statistické analýzy podle (2), takže platí

$$u_A(d) = s_{\bar{d}} = 0,034 \text{ mm}$$

Na standardní nejistotě typu B se podílejí dvě složky: chyba měřidla a osobní chyba, přičemž u obou se předpokládá rovnoměrné pravouhlé rozdělení (výskyt kterékoli hodnoty z intervalu omezeného chybou je stejný pravděpodobný). Podle (7) se dostane

$$u_{B1}(d) = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029 \text{ mm}$$

$$u_{B2}(d) = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,058 \text{ mm}$$

Výsledná standardní nejistota typu B se vypočítá analogicky k (9)

$$u_B(d) = \sqrt{u_{B1}^2(d) + u_{B2}^2(d)} = 0,065 \text{ mm}$$

a standardní nejistota kombinovaná podle vztahu (9) vychází

$$u_C(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = 0,073 \text{ 1 mm}$$

Výslednou nejistotu je před prezentací výsledku vhodné zaokrouhlit na  $u_C(d) = 0,07$  mm, takže výsledek bude

$$u_C(d) \equiv 0,07 \text{ mm}; d = (80,06 \pm 0,07) \text{ mm}$$

Uvedeným způsobem, tj. s ohledem na použitý typ rozdělení, stanovená standardní kombinovaná nejistota definuje zpravidla interval, v němž se nachází pouze necelých 70 % (66 až 68 % podle použitého zákona rozdělení) všech naměřených hodnot sledované veličiny. Není-li takováto spolehlivost určení nejistoty postačující, je možné standardní nejistotu nahradit nejistotou rozšířenou. V praxi se velmi často volí spolehlivost výsledku 95 %, což představuje rozšíření výsledné nejistoty koeficientem  $k_f = 2$ . V tomto případě bude rozšířená nejistota  $U(d) = u_C(d)k_f = 0,073 \cdot 2 = 0,146$ ; tj. po zaokrouhlení 0,15 mm.

Po této úpravě je výsledek získaný opakovaným měřením průměru válečku

$$d' = (80,06 \pm 0,15) \text{ mm}$$

Popřípadě je možné použít zápis do přehledné bilanční tabulky (tab. 3).

#### Příklad 2

Nyní je úkolem změřit délku  $l$  tyče o jmenovité hodnotě 1 400 mm pomocí přesného čárkového měřítka délky 2 m s dělením po 1 mm (přesný svinovací dvoumetr). Měření se opakuje desetkrát za stejných podmínek.

Z certifikátu měřítka vyplývá, že pro jeho tzv. dovolenou chybu  $\delta_{\text{dov}}$  platí vztah  $\delta_{\text{dov}} = \delta_1 + \delta_2 l$ , kde  $\delta_1$  je základní chyba, představovaná nejmenším dílkem  $\delta_1 = 1$  mm (rozlišovací schopnost). Dále je výrobcem definována další složka chyby, závislá na velikosti měřené délky:  $\delta_2 = f(l) = 2$  mm/m. Jiné vlivy, jako je působení teploty apod., se zanedbají.

Opakovaným měřením byly získány hodnoty délky uvedené v tab. 4 a dále se

**Tab. 3. Bilanční tabulka nejistot při měření průměru válečku pomocí posuvného měřítka (k příkladu 1)**

Veličina $X_q; d$	Odhad $x_q; d$ (mm)	Standardní nejistota $u_q(x)$ (mm)	Typ rozdělení	Koeficient citlivosti $A_q$	Příspěvek ke standardní nejistotě $u_q(d)$ ; nejistota $u(d)$ (mm)
$\bar{d}$	80,060	0,034	normální	1	0,034
měřidlo $\delta_1(d)$	0,000	0,029	rovnoměrné	1	0,029
obsluha $\delta_2(d)$	0,000	0,058	rovnoměrné	1	0,058
$d$	80,060	-	-	-	0,073

postupuje zcela analogicky jako u příkladu 1.

Odhadem hodnoty měřené veličiny je aritmetický průměr podle vztahu (1)

$$\bar{l} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} l_i = 1\,403,5 \text{ mm}$$

Standardní nejistota typu A je podle (2)

$$u_A(l) = s_l = 0,563 \text{ mm}$$

Standardní nejistota typu B má tentokrát jediný zdroj – chybu měřidla  $\delta_{\text{dov}} = \delta_1 + \delta_2 l$ , což v tomto případě znamená konkrétně  $\delta_{\text{dov}} = 1 + 2 \cdot 1,4 = 3,8 \text{ mm}$ . U chyby  $\delta_{\text{dov}}$ , resp.

intervalu, který se rozprostře kolem odhadu hodnoty měřené veličiny, se předpokládá opět rovnoměrné pravoúhlé rozdělení. Podle vztahu (7) pak platí

$$u_B(l) = \frac{3,8}{\sqrt{3}} = 2,197 \text{ mm}$$

Standardní nejistota kombinovaná vychází podle (9)

$$u_C(l) = \sqrt{u_A^2(l) + u_B^2(l)} = 2,268 \text{ mm}$$

a po zaokrouhlení

$$u_C(l) \cong 2,3 \text{ mm}$$

**Tab. 4. Naměřené hodnoty délky tyče**

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l_i$ (mm)	1 405	1 403	1 402	1 400	1 404	1 406	1 405	1 404	1 402	1 404

**Tab. 5. Bilanční tabulka nejistot při měření délky tyče svinovacím dvoumetrem (k příkladu 2)**

Veličina $X_q; l$	Odhad $x_q; l$ (mm)	Standardní nejistota $u_q(x)$ (mm)	Typ rozdělení	Koeficient citlivosti $A_q$	Příspěvek ke standardní nejistotě $u_q(l)$ ; nejistota $u(l)$ (mm)
$\bar{l}$	1 403,5	0,6	normální	1	0,6
měřidlo $\delta_1(l)$	-	2,2	rovnoměrné	1	2,2
$l$	1 403,5	-	-	-	2,3

Také v tomto případě bude velmi vhodné nahradit nejistotu standardní nejistotou rozšířenou, což ostatně odpovídá běžným zvyklostem oboru měření délek. Při použití obvyklé hodnoty koeficientu rozšíření  $k_r = 2$

$$U(l) = k_r \cdot u_C(l) \cong 4,6 \text{ mm}$$

Konečný výsledek opakovaného měření délky tyče je  $l = (1\,403,5 \pm 4,6) \text{ mm}$ .

Opět lze celý postup shrnout také do bilanční tabulky (tab. 5).

## 7. Závěr

Druhá část cyklu článků věnovaných nejistotám v měření pojednává o určování výsledku jednoduchých přímých měření. Důraz je kladen na určování jejich nejistot. Použití popsanych metod je ilustrováno na příkladu jednoduchých přímých měření délky posuvným měřidlem a přesným čárkovým měřítkem (svinovacím dvoumetrem). Složitější případy, se kterými se lze v praxi vesměs setkat, je vhodné konzultovat s odborníky na statistickou analýzu.

### Literatura:

[1] PALENČÁR, R. – VDOLČEK, F. – HALAJ, M.: Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot. Automa, 7, 2001, č. 7-8, s. 50-54 (a literatura tam uvedená). doc. Ing. Rudolf Palenčár, CSc.,

SjF STU, Bratislava  
 palencar@kam.vm.stuba.sk  
 Ing. František Vdoleček, CSc.,  
 FSI VUT, Brno  
 vdolecek@uai.fme.vutbr.cz  
 Ing. Martin Halaj,  
 SjF STU, Bratislava  
 halaj@kam.vm.stuba.sk

□