# Nejistoty v měření IV: nejistoty při kalibraci a ověřování

*Čtvrtý z volného cyklu článků přibližujících současný pohled na problematiku nejistot při měření je věnován nejistotám při kalibraci měřidel. Správný a úplný popis nejistot má největší význam právě při kalibraci. Současně se jedná o jednu z oblastí vrcholové metrologie, ve které vyplývá použití standardních metod vyjadřování nejistot přímo z předpisů mezinárodních i národních metrologických organizací.*

## 1. Úvod

Jednou z nejdůležitějších úloh metrologie v národním i mezinárodním měřítku je zajistit jednotnost měření, tj. fungování systému návaznosti měřidel. Všechna měřidla používaná při řízení výroby či jiných procesů musí mít zjištěny nebo ověřeny metrologické charakteristiky. Jednotnosti měření se dociluje jednak systémem návaznosti etalonů příslušných řádů, jednak navazováním samotných měřidel na patřičné etalony. Tato návaznost měřidel na etalony je garantována (zajišťována) procesy kalibrace, ověřování, popř. také zkoušení.

Kalibrací měřidla se rozumí soubor úkonů, jejichž výsledkem je znalost závislosti mezi hodnotami indikovanými kalibrovaným měřidlem a příslušnými hodnotami téže veličiny stanovenými podle referenčního měřidla nebo pracovního etalonu anebo realizovanými jejich prostřednictvím. Kalibruje se zpravidla metodou přímého nebo nepřímého porovnání.

Zkouškou se rozumí souhrn operací prokazujících, že zkoušené měřidlo plní předepsané požadavky. Úřední zkouška, na jejímž základě je vydán patřičný certifikát nebo je měřidlo opatřeno značkou, která dokládá, že měřidlo splňuje požadavky příslušných předpisů, bývá zpravidla označována jako ověřování. Při jistém úhlu pohledu lze předpokládat, že určité prvky kalibrace jsou svým způsobem obsaženy i v každém ověření.

Uživatele měřidla zajímá především certifikát (kalibrační list, ověřovací list), který má podle současných předpisů obsahovat nejistoty výsledků kalibrace nebo ověření. Tento trend vychází např. z platných normativních dokumentů [7], [8], [9], [10] a je dnes všeobecně uznáván. Proto je v rámci cyklu o nejistotách měření věnován problematice kalibrace tento samostatný článek.

## 2. Zvláštnosti nejistot při kalibraci

Postupy a metodika kalibrace mají svá specifika projevující se v oblasti používaných metod i omezeným počtem typů řešených úloh. Rovněž tak z pohledu nejistot jde o zcela specifické úlohy, protože navazování měřidla na etalon s sebou zpravidla nese také určité typické kombinace zdrojů nejistot, popř. i jejich vzájemné korelace, posléze se projevující v kovariancích. Analýzy nejistot při kalibraci jsou úlohami podstatně složitějšími než ty, které byly naznačeny v předchozích částech cyklu.

Při kalibracích se lze nejčastěji setkat s těmito typy úloh:

- kalibrace měřidla (zhmotnělé míry) s jednou nominální hodnotou,
- kalibrace několika měřidel (zhmotnělých měr) se stejnou nominální hodnotou,
- kalibrace sady zhmotnělých měr,
- kalibrace měřidla se spojitou stupnicí.

Při posuzování nejistot při kalibraci je třeba uvažovat především ty složky, které mají rozhodující vliv na výslednou nejistotu. Jsou to:

- nejistota hodnoty poskytnuté (reprodukované) etalonem,
- nejistota způsobená nedostatky při přenosu hodnot z etalonu na měřidlo (zahrnuje vlastní nedokonalosti metody, vlivy prostředí apod.),
- nejistota kalibrovaného měřidla způsobující problémy se stálostí a reprodukovatelností měření.

Při kalibracích je zpravidla také třeba, a to mnohem pozorněji než u provozních měření, dbát na to, aby nebyly opomenuty žádné možné korelace, které mohou ovlivnit výsledek. Co se týče kovariancí, projevují se při kalibraci tyto jejich dominantní projevy:

- kovariance mezi hodnotami veličiny poskytovanými etalonem,
- kovariance způsobené přenosem hodnot z etalonu na kalibrované měřidlo,
- kovariance mezi hodnotami kalibrovaného měřidla,
- kovariance mezi hodnotami etalonu a kalibrovaného měřidla.

Nejistota a kovariance samotného etalonu se skládají ze dvou složek:

- složek uvedených v kalibračním listu a udávajících hodnoty nejistot a kovariancí veličiny měřené nebo reprodukované etalonem v podmínkách jeho kalibrace,
- složek představujících vliv odchylky podmínek při kalibraci oproti podmínkám referenčním.

Současným problémem je zpravidla skutečnost, že zatímco nejistoty již bývají v kalibračních listech uvedeny, údaje o kovariancích zde ještě velmi často chybí, ačkoliv přitom mohou tvořit stejně významnou složku celkové výsledné nejistoty.

Jak již bylo uvedeno, je situace při kalibraci podstatně složitější a nelze v ní vystačit s jednoduchým modelem přímého nebo nepřímého měření. Z důvodů omezeného prostoru článku je v následujícím textu jen stručně přiblížena příslušná teorie, doplněná ukázkovými příklady výpočtu.

## 3. Kalibrace měřidla reprodukujícího jedinou hodnotu měřené veličiny

### 3.1 Charakteristka úlohy

Jde o případ relativně jednoduchý a téměř shodný s vyhodnocením opakovaného přímého měření jediné veličiny. Základem je $n$-krát opakované porovnání kalibrovaného měřidla s etalonem za stejných podmínek, čímž se získají hodnoty $x_1, x_2, \dots x_n$.

### 3.2 Model kalibrace a odhad hodnoty kalibrovaného měřidla

Modelem kalibrace je soustava rovnic

$$\begin{aligned} X_1 + X_E - X_p - X_M &= Y \\ X_2 + X_E - X_p - X_M &= Y \\ &\vdots \\ X_n + X_E - X_p - X_M &= Y \end{aligned} \qquad (1)$$

kde

$X_1, X_2, \dots X_n$ jsou rozdíly mezi hodnotou etalonu a hodnotou kalibrovaného měřidla při jednotlivých porovnáních,

$X_E$ hodnota etalonu,

$X_p$ korekce způsobená nedostatky přenosu hodnot z etalonu na měřidlo,

$X_M$ korekce způsobené nedostatky při udržování a reprodukování hodnoty kalibrovaným měřidlem.

Model (1) je modelem přímého stejně přesného měření, takže za předpokladu, že odhady $x_p$, $x_M$ korekčních vlivů $X_p$, $X_M$ jsou nulové a odhad hodnoty etalonu $X_E$ je $x_E$, nabude tvaru

$$y = x_E + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_E + \bar{x} \qquad (2)$$

### 3.3 Nejistota odhadu

Nejistota odhadu $y$ za předpokladu, že se připustí korelace mezi odhady $x_E$ a $x_M$, nabude tvaru

$$u(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_E^2 + u_p^2 + u_M^2 + 2u_{E,M}} \qquad (3)$$

kde nejistota stanovená metodou A je

$$u_A(y) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (4)$$

nebo

$$u_A(y) = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

kde $s_x$ je nějaký odhad směrodatné odchylky a $u_E$, $u_p$, $u_M$ jsou složky nejistoty stanovené metodou B (jak je uvedeno dále).

Složka $u_E$ je nejistota hodnoty etalonu zjištěná při kalibraci. Skládá se z nejistoty uvedené v kalibračním listu etalonu a ze složky reprezentující působení vlivů rozdílného prostředí při kalibraci etalonu a vlastních podmínek při vykonané kalibraci. Tento vliv musí, s ohledem na údaje z kalibračního listu (certifikátu) etalonu, kvantifikovat experimentátor.

Složka $u_p$ je nejistota zapříčiněná nedostatky při přenosu hodnot z etalonu na měřidlo. Zahrnuje vlivy metody i použitých prostředků a podmínek při kalibraci. Opět ji musí správně ocenit experimentátor na základě dostupných údajů a své zkušenosti s použitými metodami, prostředky a podmínkami kalibrace.

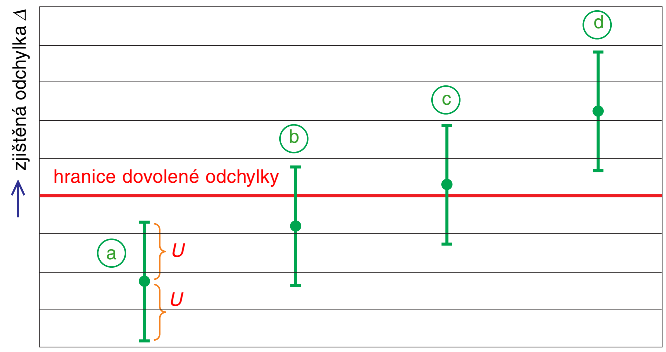
Nejistota $u_M$ je složkou vnášenou do procesu kalibrace udržováním a reprodukcí hodnoty kalibrovaným měřidlem. Určí ji opět experimentátor na základě známých metod, podmínek a prostředků indikace údajů sledovaného kalibrovaného měřidla.

Kovariance $u_{E,M}$ je zapříčiněna korelacemi mezi odhady hodnoty etalonu a kalibrovaného měřidla. Nejčastěji je její příčinou použití stejné sestavy přístrojů pro odečítání hodnoty udávané etalonem i kalibrovaným měřidlem.

Pro větší přehlednost lze tradičně použít zápis do bilanční tabulky, která má v obecném tvaru podobu *tab. 1*. Koeficienty citlivosti *A* se přitom určí stejně jako v případech popsaných již v předchozích dílech cyklu [12], [13] a [14] jako parciální derivace modelové funkce podle příslušné proměnné. Hodnoty $x_p$, $x_M$ a $x_{E,M}$ se velmi často pokládají za nulové.

Kalibrační list obsahuje tyto výsledky kalibrace:

- měřené údaje,
- hodnotu kalibrovaného měřidla *y*,
- údaj nejistoty kalibrace (nejistoty odhadu) *u*(*y*).




***Obr. 1. Situace připadající v úvahu při ověřování měřidla reprodukujícího jedinou hodnotu měřené veličiny***

### 3.4 Ověření zhmotnělé míry k reprodukci jediné hodnoty

Cílem ověření měřidla je stanovit, zda jeho odchylka se pohybuje v povolených mezích $\pm\Delta_{dov}$.

Postupuje se podobně jako v předchozím případě kalibrace a odhad odchylky se stanoví jako aritmetický průměr $\bar{x}$ získaný z *n* opakovaných komparací s etalonem za dodržení konstantních podmínek.

Nejistoty stanovené metodou A i metodou B je možné určit podobně jako v předchozí kapitole pomocí vztahů (3) a (4), čímž se získá výsledná kombinovaná nejistota $u_C$, ze které se vynásobením koeficientem rozšíření stanoví rozšířená nejistota *U*(*x*). Měřidlo (měrka) pak vyhovuje požadavkům, jestliže platí vztah

$$|\bar{x}| + U(x) \le \Delta_{dov} \qquad (6)$$

kde

$\bar{x}$ je aritmetický průměr stanovené odchylky od jmenovité hodnoty, kterou měřidlo reprezentuje,

*U*(*x*) rozšířená nejistota této odchylky,

$\Delta_{dov}$ dovolená tolerance měřidla (hranice dovolené odchylky od jmenovité hodnoty).

V praxi může nastat jeden ze čtyř případů znázorněných na *obr. 1*. V případě (a) lze konstatovat, že měřidlo plně vyhovuje požadavkům. Naopak v případě (d) měřidlo požadavkům prokazatelně nevyhovuje. V případech (b) a (c) není laboratoř schopna jednoznačně rozhodnout, zda měřidlo vyhovuje či nikoli. V těchto případech může dát jednoznačnou odpověď pouze jiné nezávislé ověření vykonané v laboratoři vybavené dokonalejší technikou apod. V současnosti se vyžaduje, aby laboratoř akreditovaná pro ověřování (kalibraci) byla schopna vždy jednoznačně stanovit výsledek jako případ (a), popř. (d), a nebylo vyžadováno žádné další posuzování. K tomu může přispět právě zmenšení nejistot ověření (kalibrace).

## 4. Kalibrace několika měřidel reprodukujících tutéž nominální hodnotu veličiny

Je-li kalibrováno několik zhmotnělých měřidel (měr) stejné nominální hodnoty, postupuje se u každého stejně jako v předcházejícím případě. Jestliže při kalibraci všech dotyčných měr působí na měření tytéž společné vlivy, budou odhady hodnot kalibrovaných měr korelované. Tato skutečnost může být důležitá v případě, že při dalším použití budou tyto míry vystupovat společně. Tehdy je třeba korelace mezi nimi ve výpočtu nejistot zohlednit. To ale předpokládá, že budou v kalibračních listech uvedeny, což v současné době bývá velmi zřídka. Jako příklad lze zmínit kalibraci několika závaží o téže hmotnosti, několika koncových měrek o stejné jmenovité délce apod. Skutečně, jsou-li při vážení na dvouramenné váze použita společně dvě závaží po 100 g, výsledek vážení bude $m = m_1 + m_2 + a$, kde $m_1$ a $m_2$ jsou hmotnosti použitých závaží převzaté z kalibračních listů a *a* je odchylka naměřená při vážení. Nejistota výsledku je

$$u^2(m) = u_A^2(a) + u^2(m_1) + u^2(m_2) + u_B^2(a) + 2u(m_1,m_2) \qquad (7)$$

kde

$u_A(a)$ je nejistota vážení na váhách stanovená metodou A,

$u(m_1)$, $u(m_2)$ nejistoty jednotlivých závaží stanovené metodou B (převzaté z kalibračních listů těchto závaží),

$u_B(a)$ nejistota vážení stanovená metodou B (jestliže nepůsobí jiné vlivy, je to nejistota vah),

$u(m_1, m_2)$ kovariance mezi určeními hodnot závaží stanovená metodou B (vyčte se z kalibračního listu závaží).

Kovariance existuje, pokud při kalibraci

***Tab. 1. Bilance nejistot při kalibraci***

| Veličina $X_i$ | Odhad $x_i$ | Standardní nejistota $u(x_i)$ | Aproximační rozdělení | Koeficient citlivosti $A_i$ | Příspěvek k výsledné nejistotě $u_i(y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}$ | $\bar{x}$ | $u_{\bar{x}} = u_A(x)$ | normální | $A_x$ | $u_A(y)$ |
| etalon $X_E$ | $x_E$ | $u(x_E)$ | rovnoměrné | $A_E$ | $u_E(y)$ |
| porovnání $X_p$ | $x_p$ | $u(x_p)$ | rovnoměrné | $A_p$ | $u_p(y)$ |
| kalibrované měřidlo $X_M$ | $x_M$ | $u(x_M)$ | rovnoměrné | $A_M$ | $u_M(y)$ |
| kovariance $X_{E,M}$ | $x_{E,M}$ | $u_{E,M}$ | rovnoměrné | $A_{E,M}$ | $u_{E,M}(y)$ |
| $Y$ | $y$ | – | – | – | $u(y)$ |

působily společné vlivy (tj. tehdy, byla-li kalibrace uskutečňována za stejných podmínek v téže laboratoři atd.). Konkrétní postup vyhodnocení kalibrace a určení kovariancí je ukázán dále na příkladu (dodatek 9).

## 5. Kalibrace sady zhmotnělých měr

Při kalibraci několika zhmotnělých měr různých nominálních hodnot (velmi často jde o jejich sadu) mohou rovněž nastat dvě základní situace. Buď je každá míra kalibrována nezávisle na ostatních, nebo jsou všechny zhmotnělé míry kalibrovány současně, takže na výsledek kalibrace mohou současně působit také veškeré vlivy. Uvedené tvrzení lze ilustrovat těmito modelovými situacemi:

- každá z měr je kalibrována jiným etalonem a jiným komparátorem za jiných podmínek,
- pro kalibraci je použit jediný etalon i komparátor za stejných podmínek použití.

V prvním případě se jedná o samostatné nezávislé kalibrace každé míry (nepůsobí-li při kalibraci jiné výrazné společné vlivy) a kalibrace se vyhodnotí podle metodiky popsané v kap. 3.

Mimo to může být část vlivů společná kalibracím všech zhmotnělých měr, část vlivů rozdílná a jistá část vlivů může být společná jen některým zhmotnělým mírám, což značně komplikuje vyhodnocování korelací. Příkladem může být postup spočívající v použití různých etalonů, ale jediného komparátoru pro celou sadu, jak je tomu zpravidla při kalibraci sady koncových měrek. Stejnou sadu koncových měrek lze ale také kalibrovat pomocí dvou komparátorů (každým část sady měrek). Různé měrky jsou porovnávány s různými etalony, ale podmínky jsou při všech porovnáních stejné.

Postupy vyhodnocení těchto případů kalibrace asi opět nejlépe přiblíží konkrétní příklady následující v dodatku. Typickými příklady z praxe jsou sady koncových měrek nebo sady závaží.

## 6. Kalibrace měřidla se spojitou stupnicí

### 6.1 Dva základní typy úloh

Při kalibraci spojité stupnice přicházejí v úvahu dva možné případy, lišící se vztahem mezi modelem kalibrace a počtem bodů, ve kterých se kalibruje. Tento počet může být:

a) rovný počtu neznámých parametrů modelu kalibrace (např. kalibrace etalonového odporového snímače teploty jako referenčního etalonu v pevných bodech teplotní stupnice);
b) větší než počet neznámých parametrů modelu kalibrace (např. kalibrace etalonového odporového snímače teploty jako pracovního měřidla, termoelektrického snímače teploty, deformačního tlakoměru, momentového klíče, mikrometru atd.).

V prvním případě je úloha z pohledu zpracování naměřených hodnot jednoduchá, protože neznámé parametry se určí ze známých rovnic a pro určení nejistot a kovariancí se použije zákon šíření nejistot.

Ve druhém případě je k dispozici počet rovnic větší, než je počet neznámých parametrů modelu a problémem je, jak určit hodnoty parametrů modelu, aby přitom byla využita veškerá nadbytečnost (což je, z hlediska co nejdokonalejšího využití informace skryté v datech, žádoucí). Obvykle se tato úloha řeší s použitím metody nejmenších čtverců, která ale vyžaduje znalost hodnot etalonů se zanedbatelnými nejistotami, což není vždy splněno. Blíže je celá situace popsána např. v [1], [4], [5] a [6].

### 6.2 Model kalibrace spojité stupnice s nadbytečností

Snahou je, stejně jako ve všech předchozích případech, vytvořit model, v tomto případě kalibrační. Účelem kalibrace měřidla je určit závislosti mezi údajem $X$ kalibrovaného měřidla a údajem etalonu $t$, a to včetně určení nejistot této závislosti. Závislost hodnoty kalibrovaného měřidla na hodnotách etalonu $X = f(t)$ se označuje jako *transformační funkce snímače*. Inverzní funkcí k transformační funkci, tedy závislost $t = g(X)$, je *kalibrační funkce snímače*.

Kalibrace se uskutečňuje porovnáním údajů kalibrovaného měřidla s údaji etalonu při působení stejné veličiny. Hodnoty působící veličiny, při kterých se kalibrované měřidlo porovnává s etalonem, se v celém kalibračním rozsahu odstupňovávají zpravidla rovnoměrně v počtu $n \geq 6$.

Za předpokladu, že hodnoty veličiny působící na kalibrované měřidlo a na etalon jsou shodné (ne vždy to musí platit), se množinou naměřených hodnot $X_j$ proloží regresní závislost typu polynomu stupně $p$. Transformační funkce má v tom případě tvar

$$X = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_p t^p \qquad (8)$$

a kalibrační funkce tvar

$$t = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots + b_p X^p \qquad (9)$$

Jestliže se kalibruje při $n$ hodnotách $t_1$ až $t_n$ a zohlední se i možné vlivy při přenosu hodnot z etalonu na kalibrované měřidlo, má teoretický model kalibrace tvar

$$\begin{aligned} X_1 &= a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \ldots a_p t_1^p \\ X_2 &= a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 + \ldots a_p t_2^p \\ &\vdots \\ X_j &= a_0 + a_1 t_j + a_2 t_j^2 + \ldots a_p t_j^p \\ &\vdots \\ X_n &= a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + \ldots a_p t_n^p \end{aligned} \qquad (10)$$

kde

$X_j$ je hodnota kalibrovaného měřidla (reprodukovaná, naměřená) při $j$-té hodnotě veličiny působící na kalibrované měřidlo,
$t_j$ $j$-tá hodnota etalonu (reprodukovaná, měřená),
$a_0, a_1, \ldots a_p$ neznámé parametry (výstupní veličiny), jejichž odhady se kalibrací zjišťují ($n \geq p + 1$).

### 6.3 Odhady parametrů transformační funkce a jejich nejistot

Teoretická transformační funkce je tvaru (8). Protože hodnoty $t$ nejsou pevné, ale též zjišťované měřením, jde o nelineární model, který se linearizuje rozvojem do Taylorovy řady se zanedbáním členů vyšších řádů.

Nulté odhady $a_{00}, a_{10}, a_{20}, \ldots a_{p0}$ parametrů $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ se určí např. metodou nejmenších čtverců pro pevné $t$, tedy bez uvažování nejistot a kovariancí spojených s odhadem hodnot etalonu. Nové odhady, jejich nejistoty a kovariance mezi nimi se znovu určí metodou nejmenších čtverců pro kovarianční matici vstupních veličin, která již také zahrnuje nejistoty etalonu, přenosu aj. Jestliže takto získaný odhad nestačí, považuje se za nultý a pokračuje se stejným způsobem v dalších iteračních krocích. Celý postup lze opakovat i v několika iteracích, zkušenosti však ukazují, že většinou se po nultém odhadu vystačí již jen s jedinou iterací výpočtu.

Celá metodika, jak vyplývá z uvedeného náznaku postupu, tentokrát směřuje k maticovému zápisu a zpracování nejistot a kovariancí. To které řešení se volí podle konkrétní situace, kdy je třeba do analýzy zahrnout obecně následující nejistoty a kovariance:

- nejistoty hodnoty veličiny poskytnuté (měřené nebo reprodukované) etalonem,
- nejistoty způsobené nedostatky přenosu hodnot z etalonu na kalibrované měřidlo,
- nejistoty vyplývající z udržování a reprodukování hodnoty kalibrovaným měřidlem,
- kovariance mezi hodnotami veličiny poskytnutými etalonem,
- kovariance způsobené přenosem hodnot z etalonu na kalibrované měřidlo,
- kovariance mezi hodnotami kalibrovaného měřidla,
- kovariance mezi hodnotami etalonu a hodnotami kalibrovaného měřidla.

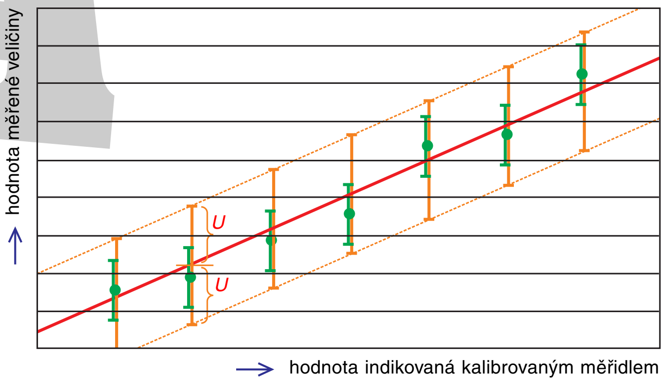
### 6.4 Odhady parametrů kalibrační funkce a jejich nejistot

Nejjednodušší způsob, jak určit kalibrační funkci, je uplatnit dříve uvedený postup pro transformační funkci (8) na kalibrační funkci (9). Tam, kde se nevyžaduje znalost transformační funkce, stačí určit jen kalibrační funkci.

Výsledkem kalibrace měřidla se spojitou stupnicí jsou:

- matematický model (kalibrační funkce),
- odhad hodnot parametrů modelu (kalibrační funkce),
- nejistoty odhadů parametrů modelu a kovariance mezi nimi.

Pro účely praxe je vhodné uvádět také tabulku, ve které jsou s dostatečně jemným




***Obr. 2. Obecný model kalibrační křivky***

odstupňováním zaneseny hodnoty údaje měřidla $X$, jim odpovídající odhady hodnot měřené veličiny $\hat{t}$ a nejistoty $u_{\hat{t}}$ stanovení $\hat{t}$. Uživateli měřidla potom stačí k naměřené hodnotě (údaji měřidla) podle tabulky přiřadit příslušnou hodnotu měřené veličiny a příslušnou nejistotu měřidla za podmínek použití definovaných při kalibraci měřidla. Hodnoty měřené veličiny a jejich nejistoty mezilehlé hodnotám uvedeným v tabulce se určují interpolací (nejčastěji lineární).

Graficky je kalibrační funkce vyjádřena kalibrační křivkou, která zobrazí výsledek kalibrace v podobě grafu. Obecně je použití kalibrační křivky ke zjištění hodnoty měřené veličiny ukázáno na *obr. 2*. Výsledné nejistoty jsou v této grafické podobě zpravidla reprezentovány rozšířenými nejistotami $U(t_j)$ pro jednotlivé hodnoty kalibrace.

## 7. Měření pomocí kalibrovaného měřidla

### 7.1 Hodnota měřené veličiny

Při určování hodnoty veličiny měřené kalibrovaným měřidlem se vychází z kalibrační funkce (9), a tedy ze vztahu

$$t = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p = \sum_{j=0}^{p} b_j x^j \qquad (11)$$

kde

$x$ je aritmetický průměr naměřených hodnot,

$b_0, b_1, \ldots b_p$ hodnoty parametrů kalibrační funkce kalibrovaného měřidla získané jeho kalibrací podle předcházejících kapitol.

### 7.2 Nejistota měření kalibrovaným měřidlem

Při určení nejistoty měření vykonaného kalibrovaným měřidlem se vychází ze vztahu (11), na který se aplikuje zákon šíření nejistot. Potom

$$u^2(t) = \sum_{j=0}^{p} x^{2j} u^2(b_j) + \left( \sum_{j=1}^{p} j x^{j-1} b_j \right)^2 u^2(x) + 2 \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=j+1}^{p} x^j x^k u(b_j, b_k) \qquad (12)$$

kde $u(b_0)$ až $u(b_p)$ stejně jako $u(b_j,\ b_k)$ se určí na základě kalibrace snímače postupem uvedeným v předchozích kapitolách, popř. v dalším textu, a $u(x)$ se určí jako kombinovaná nejistota měření kalibrovaným měřidlem.

V případě, že lze zanedbat kovariance, je

$$u^2(t) = \sum_{j=0}^{p} x^{2j} u^2(b_j) + \left( \sum_{j=1}^{p} j x^{j-1} b_j \right)^2 u^2(x) \qquad (13)$$

## 8. Závěr

Článek, jako část tematického cyklu, přibližuje relativně složitou situaci, se kterou se lze v praxi setkat při zjišťování nejistot při kalibraci a následném používání měřidel.

Omezený prostor článku nedovoluje více než pouze popsat situace a naznačit postupy jejich řešení, tak jak se s nimi lze u všech čtyř typů úloh uvedených v článku setkat v praxi. Mnohé z úloh již ale navíc vedou k maticovému zápisu a maticovému zpracování, vyžadujícími určitou zkušenost i zvýšenou pozornost při samotné realizaci měření (kalibrace) i následné analýze nejistot. V závěrečné kapitole článku je přiblížena situace, která nastane v oblasti nejistot, použije-li se kalibrované měřidlo k provoznímu měření.

Jak bylo několikrát zmíněno v textu, je v připojeném dodatku uvedeno několik příkladů z praxe. Podrobnější postupy je také možné nalézt např. v literatuře nebo je konzultovat s odborníky ze specializovaných metrologických pracovišť.

## 9. Dodatek

### Příklady určení nejistot při kalibraci

**Příklad 1. Kalibrace měřidla pro reprodukci jediné hodnoty měřené veličiny: kalibrace koncové měrky 50 mm**

Úkolem je zkalibrovat koncovou měrku jmenovitého rozměru $L = 50$ mm mechanickým porovnáním s etalonovou koncovou měrkou stejného jmenovitého rozměru. Model kalibrace sestavený na základě zkušeností a studia literatury spolu tvoří vztahy

$$l_i = l_E + \delta_{li} - \delta_{lp} - \delta_{lM}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$
$$l_E = l_{EK} + \delta_{lD} + \delta_{l\Delta\theta E}$$
$$\delta_{lp} = \delta_{lC} + \delta_{l\Delta T}, \quad \delta_{lM} = \delta_{l\Delta\theta K}$$

kde

$l_i$ je délka kalibrované měrky stanovená $i$-tým měřením,

$l_E$ délka etalonové měrky,

$l_{EK}$ délka etalonu uvedená v jeho kalibračním listě,

$\delta_{lC}$ chyba komparátoru,

$\delta_{lD}$ drift etalonu,

$\delta_{li}$ naměřený rozdíl mezi etalonovou a kalibrovanou měrkou,

$\delta_{lM}$ chyba při reprodukování hodnoty kalibrovaným měřidlem,

$\delta_{lp}$ korekce nedostatků přenosu hodnot z etalonu na kalibrované měřidlo,

$\delta_{l\Delta T}$ chyba způsobená rozdílem teplot etalonu a kalibrované měrky,

$\delta_{l\Delta\theta E}$ změna délky etalonu způsobená rozdílem mezi teplotou etalonu při kalibraci a jeho referenční teplotou (uvedenou v kalibračním listu),

$\delta_{l\Delta\theta K}$ změna délky kalibrovaného měřidla vlivem rozdílu hodnot teploty při jeho kalibraci a referenční teploty.

Po provedení všech substitucí bude mít model kalibrace měrky tvar

$$l_i = l_{EK} + \delta_{lD} + \delta_{l\Delta\theta E} + \delta_{li} - \delta_{lC} - \delta_{l\Delta T} - \delta_{l\Delta\theta K}$$

Podle stanoveného postupu kalibrace bylo provedeno $n = 5$ opakovaných měření rozdílu $\delta_{li}$, ze kterých byl vypočítán aritmetický průměr $\bar{\delta}_l = -0{,}708$ µm.

Etalonová koncová měrka má podle certifikátu délku $y_E = 50$ mm – 0,30 µm a nejistota této hodnoty je 0,040 µm.

Nedělají-li se žádné korekce a všechny vlivy se zahrnou do nejistoty, bude odhad délky kalibrované měrky

$$y = l = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} (l_{EK} + \delta_{li}) = l_{EK} + \bar{\delta}_l =$$
$$= 50\ \text{mm} - 0{,}30\ \mu\text{m} - 0{,}708\ \mu\text{m} =$$
$$= 50\ \text{mm} - 1{,}008\ \mu\text{m}$$

Jaké jsou nejistoty tohoto odhadu?

Co se týče *nejistoty stanovené metodou A*, je třeba vzít v úvahu, že při samotné kalibraci bylo vykonáno pouhých pět měření, ale z dřívějšího většího počtu měření je známo, že směrodatná odchylka jednoho měření je 0,053 µm. Standardní nejistota typu A pak je

$$u_A(l) = \frac{1}{\sqrt{5}}\, 0{,}053 = 0{,}0237\ \mu\text{m} \approx 0{,}024\ \mu\text{m}$$

Výsledná *standardní nejistota typu B* se vypočítá jako odmocnina ze součtu čtverců pěti složek, kterými jsou:

1. *Nejistota hodnoty etalonu*: podle certifikátu je standardní nejistota etalonu $u(l_{EK}) = 0{,}040$ µm.
2. *Drift etalonu*: podle předcházejících kalibrací je odhadnut jako nulový v mezích ±0,06 µm. Všeobecné zkušenosti říkají, že nulový drift je nejpravděpodobnější a že lze použít trojúhelníkové rozdělení. Potom
$$u(\delta_{lD}) = \frac{0{,}06}{\sqrt{6}} = 0{,}024\ 5\ \mu\text{m}$$

3. *Nejistota komparátoru*: podle certifikátu o kalibraci komparátoru je jeho rozšířená kombinovaná nejistota 0,016 µm při $k = 2$. Z toho vyplývá standardní nejistota $u(l_C)$ = = 0,016/2 = 0,008 µm.
4. *Nejistota vlivem rozdílu teplot* $\Delta T$ kalibrované a etalonové měrky: z definice teplotního součinitele délkové roztažnosti látek $\alpha$ (v daném případě $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$) vyplývá, že $\delta_{l\Delta T} = \alpha\ L\ \Delta T$. Za předpokladu rovnoměrného rozdělení $\Delta T$ v rozmezí ±0,1 K je standardní nejistota tohoto zdroje

$$u(\delta_{l\Delta T}) = 11{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1l / \sqrt{3} = 0{,}033\ \mu\mathrm{m}$$

5. *Nejistota vlivem rozdílu* $\Delta\Theta$ mezi teplotou v místnosti (a tím i teplotou etalonu a kalibrované měrky) a referenční teplotou (20 °C), ke které mají být výsledky uváděny: je-li rozdíl v teplotních součinitelích délkové roztažnosti látky etalonové a kalibrované měrky $\Delta\alpha$, bude výsledek kalibrace zatížen nejistotou

$$u(\delta_{l\Delta T\mathrm{K}} - \delta_{l\Delta T\mathrm{E}}) = u(\delta) = \Delta\alpha\ L\ \Delta\Theta$$

Odhaduje se, že $\Delta\alpha \leq 1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, a dále se předpokládá, že teplota v místnosti je vždy v rozmezí 20 ±0,6 °C. Potom se vyjde ze zkušeností z minulých podobných kalibrací a doprovodných analýz, popř. z literatury, kde lze nalézt i postupy pro výpočet této složky nejistoty. Podrobně celou metodiku uvádí např. EAL-R2 [8]. Použijí-li se výsledky dřívějších analýz, lze předpokládat, že $u(\Delta\Theta)$ = = 0,02 µm.

Po dosazení vyjde výsledná standardní nejistota typu B

$$u_\mathrm{B}(l) =$$

$$= \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}0245^2 + 0{,}008^2 + 0{,}033^2 + 0{,}02^2} =$$

$$= 0{,}061\ \mu\mathrm{m}$$

Co se týče kovariancí, nejsou mezi měřením délky etalonu a délky kalibrované měrky v tomto případě uvažovány žádné korelace.

Celková *výsledná standardní nejistota kombinovaná* odhadu délky kalibrované měrky je

$$u_\mathrm{C}(l) = \sqrt{u_\mathrm{A}^2(l) + u_\mathrm{B}^2(l)} =$$

$$= \sqrt{0{,}024^2 + 0{,}061^2} = 0{,}066\ \mu\mathrm{m}$$

*Celkový výsledek kalibrace* lze (podle zvyklostí popsaných v předchozích částech cyklu) prezentovat dvěma způsoby, přičemž přednost by se měla dávat prezentaci prostřednictvím rozšířené nejistoty $U(l) = 2 \cdot 0{,}066$ = = 0,132 µm (pro $k = 2$):

1. Délka kalibrované měrky je $l$ = 50 mm – 1,008 µm, $u(l)$ = 0,066 µm.
2. Délka kalibrované měrky je $l$ = 50 mm – – 1,008 µm, $U(l)$ = 0,132 µm pro $k = 2$.

*Komentovaný výsledek pak bude znít:* délka kalibrované koncové měrky o nominální délce 50 mm je (49,998 992 ±0,000 132) mm.

Uvedená rozšířená nejistota měření je vyjádřena jako standardní nejistota měření vynásobená koeficientem pokrytí $k = 2$, která při normálním rozdělení odpovídá konfidenční pravděpodobnosti přibližně 95 %. Uvedené výsledky lze přehledně zapsat do bilanční tabulky (*tab. 2*).

**Příklad 2. Kalibrace několika měřidel reprodukujících tutéž nominální hodnotu veličiny: kalibrace tří koncových měrek téhož jmenovitého rozměru**

Úkolem je zkalibrovat sadu tří koncových měrek (pracovních měřidel) stejné jmenovité délky tím jistým etalonem, při použití téhož komparátoru měřícího rozdíl délky kalibrované měrky a délky etalonu za stejných okolních podmínek. Materiál všech měrek má stejný teplotní součinitel délkové roztažnosti.

Model kalibrace má tvar

$$Y_1 = X_1 + X_\mathrm{E} - X_\mathrm{k},\quad Y_2 = X_2 + X_\mathrm{E} - X_\mathrm{k}$$
$$Y_3 = X_3 + X_\mathrm{E} - X_\mathrm{k} \qquad \text{(D1)}$$

kde

$Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ jsou délky kalibrovaných měrek,
$X_1$, $X_2$, $X_3$ naměřené hodnoty odchylek měrek od délky etalonu,
$X_\mathrm{E}$ délka etalonu,
$X_\mathrm{k}$ celková korekce vlivu nedostatků přenosu hodnot z etalonu na kalibrovanou měrku a nedostatků při udržování a reprodukování hodnoty kalibrovaným měřidlem.

Kalibrované měrky mají nominální délku $L$ = 100 mm. Odhad délky etalonové měrky je $y$ = 100 mm – 0,24 µm s nejistotou 0,034 µm. Rozdíly v délkách měrek se měří komparátorem s kombinovanou standardní nejistotou $u(l_C)$ = 0,008 µm.

Z pěti měření každé měrky byly, postupem stejným jako v případě jediné měrky, získány odhady rozdílů délek $\bar{l}_1$ = –0,666 µm, $\bar{l}_2$ = 1,212 µm, $\bar{l}_3$ = – 0,815 µm. Hodnota $x_\mathrm{k}$ veličiny $X_\mathrm{k}$ je považována za nulovou. Odhady délek kalibrovaných měrek z naměřených a vyhodnocených údajů jsou

$y_1 = y_E + \bar{l}_1$ = 100 mm + (–0,24 – 0,666) µm = = 100 mm – 0,906 µm;
$y_2 = y_E + \bar{l}_2$ = 100 mm + (–0,24 + 1,212) µm = = 100 mm + 0,972 µm;
$y_3 = y_E + \bar{l}_3$ = 100 mm + (–0,24 – 0,815) µm = = 100 mm – 1,055 µm.

*Nejistota stanovená metodou A* se určí jako v příkladu 1 z minulých měření a je 0,024 µm pro porovnávání všech tří měrek.

*Nejistoty stanovené metodou B* jsou pro všechny tři uvažované případy stejné a určí se postupem stejným jako v příkladu 1. Tato nejistota je $u_\mathrm{B}$ = 0,056 µm.

*Celková (kombinovaná) standardní nejistota* potom bude $u$ = 0,061 µm, pro všechny tři uvažované měrky shodná, a výsledek kalibrace je

$y_1$ = 100 mm – 0,906 µm; $u_1$ = 0,061 µm
$y_2$ = 100 mm + 0,972 µm; $u_2$ = 0,061 µm
$y_3$ = 100 mm – 1,055 µm; $u_3$ = 0,061 µm

Protože nelze vyloučit společné použití dvou nebo i všech tří kalibrovaných měrek, je třeba v kalibračním certifikátu uvést hodnoty kovariancí mezi zjištěnými odhady jejich délek. Kovariance (stanovené metodou typu B) jsou důsledkem použití téhož etalonu i téhož komparátoru pro všechny tři kalibrace. Mimo to je možné určit kovariance také metodou typu A (pokud existují).

*Kovariance stanovené metodou B* budou stejné, neboť jsou důsledkem společného vlivu všech zdrojů nejistot typu B působících při kalibraci. Podle modelu (D1) bude

$$Y_1 = X_1 + X_\mathrm{E} - X_\mathrm{k}$$
$$Y_2 = X_2 + X_\mathrm{E} - X_\mathrm{k}$$

Kovariance mezi odhady $y_1$ a $y_2$ vycházejí ze vztahu podle [5]

$$\mathrm{cov}(y_1, y_2) = u_\mathrm{E}^2 + u_\mathrm{k}^2 = u_\mathrm{B}^2 =$$

$$= 0{,}056^2 = 0{,}003\ 14\ \ \mu\mathrm{m}^2$$

***Tab. 2. Bilanční tabulka nejistot kalibrace koncové měrky 50 mm (k příkladu 1)***

| Veličina $X_i$ | Odhad $x_i$ (mm) | Standardní nejistota $u(x_i)$ (µm) | Aproximační rozdělení | Koeficient citlivosti $A_i$ | Příspěvek ke standardní nejistotě $u_i(l)$ (µm) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{\delta}_l$ | –0,001 008 | 0,024 0 | normální | 1 | 0,024 0 |
| etalon $l_{\mathrm{EK}}$ | 49,999 970 | 0,034 0 | rovnoměrné | 1 | 0,040 0 |
| drift $\delta_{l\mathrm{D}}$ | 0,0 | 0,024 5 | trojúhelníkové | 1 | 0,024 5 |
| komparátor $\delta_{l\mathrm{C}}$ | 0,0 | 0,008 0 | rovnoměrné | 1 | 0,008 0 |
| rozdíl teplot měrek $\delta_{l\Delta T}$ | 0,0 | 0,034 0 | rovnoměrné | 1 | 0,033 0 |
| rozdíl teplot od 20 °C $\delta_{l\Delta T}$ | 0,0 | 0,020 0 | rovnoměrné | 1 | 0,020 0 |
| $Y$ | 49,998 992 | – | – | – | 0,066 0 |

*Tab. 3. Naměřené hodnoty (k příkladu 3)*

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ (mg) | –4,80 | –3,94 | 4,07 | 3,30 | –4,77 | –3,06 | –3,95 | –3,95 | –4,64 | –4,66 | –0,73 | –0,73 | –0,76 | –0,77 |

Obdobně lze nalézt i kovariance mezi $y_1$ a $y_3$ a mezi $y_2$ a $y_3$.

Ke stejnému výsledku lze dojít i následující úvahou. Vzhledem k tomu, že $\mathrm{cov}(y_1, y_2) = u(y_1, y_2) = r u(y_1) u(y_2)$, stačí najít takový společný vliv, jehož příspěvek k nejistotě odhadů $y_1$, $y_2$ je znám a u kterého lze předpokládat koeficient korelace $r = 1$. Potom

$$u(y_1, y_2) = r\, u(y_1) u(y_2) = u(y_1) u(y_2)$$

Konkrétně v uvažovaném případě je takovým společným vlivem chyba délky etalonu $X_E$ a korekce vlivu nedostatků při přenosu $X_k$, přičemž $u(y_1) = u(y_2) = u_B$, tedy

$$u_B(y_1, y_2) = u_B(y_1, y_3) = u_B(y_2, y_3) = r u_B u_B = u_B^{\,2} = 0{,}056^2 = 0{,}00314\ \mu\mathrm{m}^2$$

Kovariance stanovené metodou typu A podle TPM 0051-93 [10] jsou pro data tohoto příkladu zanedbatelné.

Při měření s použitím třeba dvou koncových měrek (např. první a třetí) to znamená, že jestliže naměřený rozdíl bude 3,48 µm a nejistota měření rozdílu stanovená metodou A bude 0,058 µm, bude *správný výsledek*

$$l = (100\ \mathrm{mm} - 0{,}906\ \mu\mathrm{m}) + (100\ \mathrm{mm} - 1{,}055\ \mu\mathrm{m}) + 3{,}480\ \mu\mathrm{m} = 200\ \mathrm{mm} + 1{,}519\ \mu\mathrm{m}$$

a jeho *celková standardní nejistota*

$$u_C(l) = \sqrt{u_A^2(l) + u^2(y_1) + u^2(y_2) + 2u_B(y_1, y_2)} =$$

$$= \sqrt{0{,}058^2 + 0{,}061^2 + 0{,}061^2 + 2 \cdot 0{,}003\,14} =$$

$$= \sqrt{0{,}017\,086} = 0{,}131\ \mu\mathrm{m}$$

Existují také další možnosti. Neuvažují-li se kovariance, bude vypočítaná kombinovaná standardní nejistota výsledku $u(l) = 0{,}104$ µm, čímž dochází k neoprávněnému vylepšení výsledku měření. Přitom, pro zjednodušení, nebyly uvažovány nejistoty způsobené nedokonalostí spojení dvou měrek, odchylkou podmínek měření od podmínek kalibrace použitých měrek, případným rozdílem teplot použitých měrek a měrek a měřeného předmětu.

Pokud by bylo v modelu (D1) vykonáno celkem šest měření, a to vždy po dvou měřeních při porovnávání každé kalibrované měrky, přejde model (D1) na model (pro jednoduchost se předpokládá, že $X_k$ lze zanedbat)

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_E, & Y_2 &= X_2 + X_E \\ Y_3 &= X_3 + X_E, & Y_1 &= X_4 + X_E \\ Y_2 &= X_5 + X_E, & Y_3 &= X_6 + X_E \end{aligned} \qquad \text{(D2)}$$

Pro odhady platí

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}5(X_1 + X_4) + X_E \\ y_2 &= 0{,}5(X_2 + X_5) + X_E \\ y_3 &= 0{,}5(X_3 + X_6) + X_E \end{aligned} \qquad \text{(D3)}$$

a pro nejistoty a kovariance platí

$$u(y_1) = u(y_2) = u(y_3) = \sqrt{0{,}5\sigma^2 + u_B^2} \qquad \text{(D4)}$$

$$u(y_1, y_2) = u(y_1, y_3) = u(y_2, y_3) = u_B^2 \qquad \text{(D5)}$$

přičemž $\sigma^2$ je parametr představující jednotkový rozptyl měření, což je vlastně druhá mocnina jednotkové nejistoty stanovené metodou A. Lze tedy zjednodušeně psát $\sigma^2 = s^2(\bar{x}) = u_A^2(x)$. Používá se zejména tam, kde není možné získat dostatečný počet opakovaných měření pro plnohodnotné statistické vyhodnocení. Hodnotu $\sigma^2$ lze odhadnout z poměru známých nejistot (blíže viz např. [2], [4] a další specializovaná literatura).

Při měření společně dvěma kalibrovanými měrkami bude jimi reprodukovaná délka $y = y_1 + y_2$ a její nejistota (při zanedbání nejistot způsobených nedokonalostí spojení měrek)

$$u(y) = \sqrt{u^2(y_1) + u^2(y_2) + 2u(y_1, y_2)} \qquad \text{(D6)}$$

Při pominutí kovariancí by platilo

$$u(y) = \sqrt{u^2(y_1) + u^2(y_2)} = \sqrt{\sigma^2 + 2u_B^2} \qquad \text{(D7)}$$

což je nepřípustné podhodnocení nejistoty výsledku měření.

**Příklad 3. Kalibrace sady zhmotnělých měr: kalibrace sady závaží jediným etalonem**

Má se kalibrovat sada závaží o jmenovitých hmotnostech 500, 200, 200*, 100 a 100* g s použitím etalonu o jmenovité hmotnosti 1 000 g, jehož systematická chyba $\Delta_E$ i standardní nejistota této systematické chyby $u_E$ (nejistota etalonem reprodukované hodnoty hmotnosti) jsou známy. Etalonem reprodukovaná hodnota hmotnosti $x_E = 1\,000 + \Delta_E$. Pro jednoduchost se předpokládá, že korekce na vztlak je nulová (všechna závaží i etalon jsou vyrobeny ze stejného materiálu) a neexistují ani žádné další vlivy působící nejistoty měření mimo etalon a zdroje nejistot typu A.

Pro kalibraci se použije např. toto kalibrační schéma:

$$\begin{array}{llllllllll}
500 & + & 200 & + & 200^* & + & 100 & & & = X_1 + X_E \\
500 & + & 200 & + & 200^* & + & 100^* & & & = X_2 + X_E \\
500 & - & 200 & - & 200^* & - & 100 & & & = X_3 \\
500 & - & 200 & - & 200^* & - & 100^* & & & = X_4 \\
 & & 200 & - & 200^* & + & 100 & - & 100^* & = X_5 \\
 & & 200 & - & 200^* & - & 100 & + & 100^* & = X_6 \\
 & & 200 & - & 200^* & & & & & = X_7 \\
 & & 200 & - & 200^* & & & & & = X_8 \\
 & & 200 & & & - & 100 & - & 100^* & = X_9 \\
 & & 200 & & & - & 100 & - & 100^* & = X_{10} \\
 & & & & 200^* & - & 100 & - & 100^* & = X_{11} \\
 & & & & 200^* & - & 100 & - & 100^* & = X_{12} \\
 & & & & & & 100 & - & 100^* & = X_{13} \\
 & & & & & & 100 & - & 100^* & = X_{14}
\end{array} \qquad \text{(D8)}$$

Použitý model je přeurčen (počet rovnic je větší než počet neznámých veličin) a řeší se metodou nejmenších čtverců (blíže viz hlavní text článku).

Odhady hodnot závaží jsou

$$\begin{aligned}
m_{500} &= 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_E) \\
m_{200} &= 0{,}1(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + 2x_E) \\
m_{200^*} &= 0{,}1(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 + x_{11} + x_{12} + 2x_E) \\
m_{100} &= 0{,}1(x_1 - x_3 + x_5 - x_6 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_E) \\
m_{100^*} &= 0{,}1(x_2 - x_4 - x_5 + x_6 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} + x_E)
\end{aligned} \qquad \text{(D9)}$$

Odhady standardních nejistot (kombinovaných) vypočtených hodnot hmotnosti závaží

$$\mathbf{U}(m) = \mathbf{U}_A(m) + \mathbf{U}_B(m) =$$

$$= \frac{u^2(x)}{100} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \frac{u_E^2}{100} \begin{pmatrix} 25 & 10 & 10 & 5 & 5 \\ 10 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(D10)}$$

kde na diagonálách matic jsou čtverce nejistot určených hodnot jednotlivých závaží a mimo diagonály jsou kovariance mezi určenými hodnotami jednotlivých závaží.

Zde je třeba upozornit, že kalibrační protokoly ve většině případů kovariance mezi odhady hodnot závaží neobsahují.

Číselný výpočet lze ukázat s údaji uvedenými v *tab. 3* se závažím o hmotnosti 1 kg, $x_E = (1\,000 - 2{,}82 \cdot 10^{-3})$ g a $u(x_E) = u_E = 0{,}07$ mg jako etalonem.

Odhady hodnot kalibrovaných závaží a jejich standardní (kombinované) nejistoty jsou

$m_{500} = 500$ g – 1,753 mg; $u_{500} = 0{,}040$ mg
$m_{200} = 200$ g – 4,678 mg; $u_{200} = 0{,}018$ mg
$m_{200^*} = 200$ g – 0,748 mg; $u_{200^*} = 0{,}018$ mg
$m_{100} = 100$ g – 0,417 mg; $u_{100} = 0{,}013$ mg
$m_{100^*} = 100$ g + 0,394 mg; $u_{100^*} = 0{,}013$ mg
$u_x = 0{,}036\,1$ mg

Kovariance odhadů kombinací dvojic kalibrovaných závaží jsou

$u_{500,\,200} = (0{,}022\,1\ \mathrm{mg})^2$; $u_{500,\,200^*} = (0{,}022\,1\ \mathrm{mg})^2$
$u_{500,\,100} = (0{,}015\,6\ \mathrm{mg})^2$; $u_{500,\,100^*} = (0{,}015\,6\ \mathrm{mg})^2$
$u_{200,\,200^*} = (0{,}014\ \mathrm{mg})^2$; $u_{200,\,100} = (0{,}009\,9\ \mathrm{mg})^2$
$u_{200,\,100^*} = (0{,}009\,9\ \mathrm{mg})^2$; $u_{200^*,\,100} = (0{,}009\,9\ \mathrm{mg})^2$
$u_{200^*,\,100^*} = (0{,}009\,9\ \mathrm{mg})^2$; $u_{100,\,100^*} = (0{,}007\ \mathrm{mg})^2$

Například k vážení se použijí dvě závaží $m_{500}$ a $m_{100*}$ v modelu měření $m = m_{500} + m_{100*} + x$. S naměřenou hodnotou rozdílu hmotností $x$ = 25,280 mg se standardní kombinovanou nejistotou $u(x)$ = 0,056 mg bude výsledkem měření hodnota hmotnosti měřeného objektu $m$ = 499,998 247 + 100,000 394 + 0,025 280 = = 600,023 921 g a nejistota určení této hodnoty

$$u^2(m) = u^2(m_{500}) + u^2(m_{100*}) + 2u(m_{500,} m_{100*}) + u^2(x) = = 0{,}040^2 + 0{,}013^2 + 2 \cdot 0{,}015\,6^2 + 0{,}056^2 = = 0{,}005\,392\ \mathrm{mg}^2,$$ a tedy $u(m)$ = 0,074 mg

Celkový výsledek měření je

$m$ = 600,023 921 g, $u(m)$ = 0,000 074 g

Pokud by nebyla uvažována kovariance mezi závažími, byla by nejistota určení hmotnosti $u(m)$ = 0,000 070 g.

**Literatura:**

[1] PALENČÁR, R. – RUIZ, J. M. – JANIGA, I. – HORNÍKOVÁ, A.: Štatistické metódy v metrologických a skúšobných laboratóriách. Bratislava, Grafické štúdio – Juriga 2001.
[2] CHUDÝ, V. – PALENČÁR, R. – KUREKOVÁ, E. – HALAJ, M.: Meranie technických veličín. Bratislava, Vydavateľstvo STU 1999.
[3] PALENČÁR, R. – KUREKOVÁ, E. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M.: Systém riadenia meraní. Bratislava, Grafické štúdio – Juriga 2001.
[4] WIMMER, G. – PALENČÁR, R. – WITKOVSKÝ, W.: Stochastické modely merania. Bratislava, Grafické štúdio – Juriga 2000.
[5] KUBÁČEK, L. – PÁZMAN, A.: Štatistické metódy v meraní. Bratislava, Veda 1979.
[6] KUBÁČEK, L. – KUBÁČKOVÁ, L.: Statistika a metrologie. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci 2000.
[7] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (Směrnice pro vyjadřování nejistoty při měření). BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML 1995.
[8] EAL-R2 – Expression of the Uncertainty in Measurement in Calibration (Metodika vyjadřování nejistot při kalibracích). EA 4/02 (původní značení EAL-R2), 1997 (v SR MSA-104, 1998, v ČR EAL-R2, 1997).
[9] Etalóny. Vyjadrovanie chýb a neistôt. TPM 0050, FÚNM 1992.
[10] Stanovenie neistôt pri meraniach. TPM 0051, FÚNM 1993.
[11] ĎURIŠ, S. – MIKLEŠOVÁ, K.: Metódy a neistoty pri meraní, kalibrácii a overovaní v termometrii. Kalibrácia vo všeobecnosti. Neistoty v meraní, kalibrácii a skúšaní, 1. časť. Bratislava, VS ÚNMS SR 2000.
[12] PALENČÁR, R. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M.: Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot. Automa, 7, 2001, č. 7-8, s. 50-54.
[13] PALENČÁR, R. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M.: Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření. Automa, 7, 2001, č. 10, s. 52-56.
[14] PALENČÁR, R. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M.: Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření. Automa, 7, 2001, č. 12, s. 28-33.

*Ing. František Vdoleček, CSc.,*
*FSI VUT, Brno*
*(vdolecek@uai.fme.vutbr.cz)*
*doc. Ing. Rudolf Palenčár, CSc.,*
*SjF STU, Bratislava*
*(palencar@kam.vm.stuba.sk)*
*Ing. Martin Halaj, Ph.D.,*
*SjF STU, Bratislava*
*(halaj@kam.vm.stuba.sk)*