

## Úloha č. 4: Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení

jarní semestr 2023

### 1 Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

#### 1.1 Tíhové zrychlení na Zemi

Tíhové zrychlení  $g$  je definováno jako zrychlení volného pádu tělesa ve vakuu. V daném bodě je pro všechna tělesa stejné. Tíhové zrychlení obecně závisí na zeměpisné šířce  $\phi$  a nadmořské výšce  $H$  dle empirické relace <sup>1</sup>

$$g = [9,780\ 356(1 + 0,005\ 288\ 5 \sin^2 \phi - 0,000\ 005\ 9 \sin^2 2\phi) - 0,000\ 003\ 086\ H] \text{ ms}^{-2}. \quad (1)$$

Zrychlení může navíc kolísat dle lokálních nepravidelností a nehomogenit zemského tělesa v řádu  $10^{-3} \text{ ms}^{-2}$  od hodnoty určené pomocí (1). Fyzikální tabulky [6] udávají pro Brno  $g = 9,809\ 980 \text{ ms}^{-2}$ .

#### 1.2 Možné postupy k určení tíhového zrychlení

Měření tíhového zrychlení přímo z definice, tj. měřením zrychlení volného pádu, je přístrojově velmi náročné. Poměrně přesné a přitom přístrojově nenáročné měření využívá kyvadel. Obecně lze použít libovolné fyzické kyvadlo, jehož perioda je dána vztahem

$$T(\varphi_m) = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_m^2 + \frac{11}{3072} \varphi_m^4 + \frac{173}{737280} \varphi_m^6 \dots \right), \quad (2)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení,  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení,  $m$  jeho hmotnost,  $x$  vzdálenost osy otáčení (závěsu) od těžiště kyvadla,  $\varphi_m$  amplituda kmitů v obloukové míře. Pro amplitudu kmitů jdoucí limitně k nule (tzv. nulové kmity) dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}}. \quad (3)$$

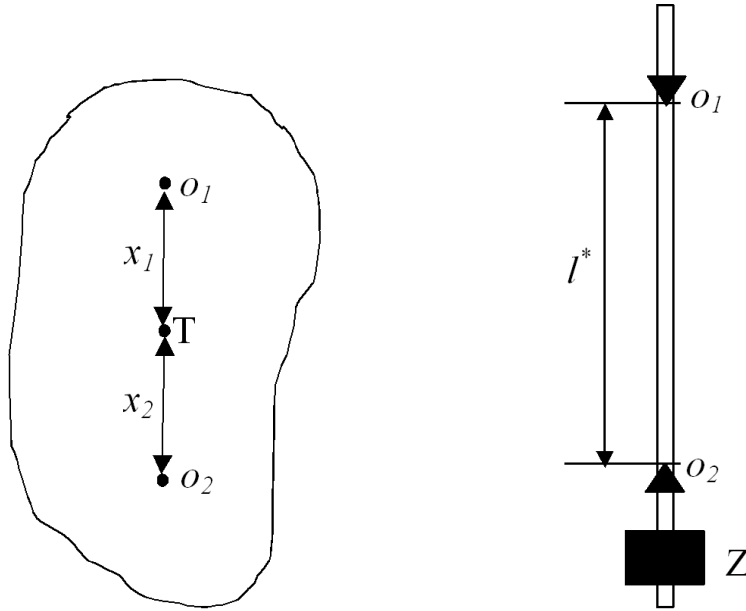
Nerespektování závislosti periody na amplitudě je jedním z potenciálních zdrojů systematické chyby. Například relativní odchylka periody pro amplitudu  $5^\circ$  (tj.  $\varphi_m \approx 8,7 \cdot 10^{-2}$  rad) od periody nulových kmitů

$$\frac{\Delta T}{T} \cong \frac{1}{16} (\varphi_m)^2 \cong 5 \cdot 10^{-4} \quad (4)$$

je srovnatelná s relativní nejistotou způsobenou 0,1% nejistotou určení délky matematického kyvadla.

Uvažujme těleso libovolného tvaru, které může kmitat vzhledem ke dvěma různým osám  $o_1, o_2$  tak, že doby kmitu k příslušným osám jsou shodné  $T_1 = T_2$  (viz obr. 1). Pro doby kmitu vzhledem

<sup>1</sup>Jursa, A. S. Ed., *Handbook of Geophysics and the Space Environment*, 4th ed. Air Force Geophysics Laboratory, 1985, p. 14-17



Obrázek 1: Fyzické kyvadlo a reverzní kyvadlo. Symboly  $x_1$ ,  $x_2$  označují vzdálenosti os  $o_1$ ,  $o_2$  od těžiště T.

k osám  $o_1$  a  $o_2$  můžeme psát

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2}}. \quad (5)$$

Podmínka rovnosti dob kmitu vede na rovnici

$$\frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1} = \frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2}. \quad (6)$$

Zaveďme redukovanou délku  $l = x_1 + x_2$ . Pokud vyjádříme např.  $x_2 = l - x_1$ , dostaneme z rovnice (6) vztah

$$l = \frac{J_0 + mx_1^2}{mx_1}. \quad (7)$$

Porovnáním rovnice (7) s rovnicí (5) dostaneme výslednou periodu

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8)$$

Obdobným postupem bychom získali stejný vztah i pro  $T_2$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9)$$

K tomuto výsledku lze dospět ještě jiným způsobem, ze kterého je zřejmější, jak ovlivňuje vzdálenost osy otáčení od těžiště výslednou periodu. Výpočet je uveden v příloze D.

K praktickému provedení měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla je zapotřebí speciální konstrukce kyvadla – tzv. reverzní kyvadlo.

### 1.3 Postup měření

Rovnice (8) a (9) platí zcela obecně pro fyzické kyvadlo libovolného tvaru. Jedinou podmínkou je rovnost dob kmitu ke dvěma různým osám. Pro měření tíhového zrychlení tedy stačí

1. zajistit platnost rovnosti  $T_1 = T_2$ ,
2. změřit dobu kmitu,
3. určit redukovanou délku  $l = x_1 + x_2$ , která je přímo rovna vzdálenosti os otáčení, pokud obě osy a těžiště leží v jedné přímce.

Největší problém je zajistit rovnost dob kmitu ke dvěma různým osám. Technicky jednodušší než měnit polohu osy rotace je měnit polohu těžiště kyvadla při konstrukčně pevných osách rotace. Tento postup umožňuje reverzní kyvadlo (viz obr. 1). Kyvadlo kýve zavěšeno na břitech, polohu těžiště je možné měnit posuvem přidavného závaží Z. Má-li být redukovaná délka rovna vzdálenosti os otáčení, musí těžiště ležet na přímce mezi průsečíky této přímky s osami otáčení. U reverzního kyvadla je to zajištěno symetrií konstrukce.

Při vlastním měření postupujeme tak, že měříme závislost doby kmitu na poloze závaží pro obě osy. Polohu závaží určujeme pomocí lineárního měřítka vzhledem k nějaké vhodně zvolené referenční pozici  $y$ .

V principu by měřítko nemuselo být ani metrické, jedinou podmínkou je linearita a dostatečně jemné dělení k zajištění potřebné přesnosti. Jednou z možností je využít mm stupnici vyrytou na tyči, jejíž nevýhoda je v malé přesnosti odečtu i nastavení, ne lepší než 0,5 mm. Druhou možností je vztáhnout pozici spodní hrany závaží k hraně bližšího břitu a pozici odměřovat posuvným měřítkem. Dosažitelná přesnost je pod 0,1 mm.

Po vynesení obou závislostí do grafu najdeme polohu závaží  $y_0$  takovou, při které obě doby kmitu splynou (viz obr. 2). Do této polohy můžeme závaží vrátit a změřit ještě jednou a co nejpečlivěji doby kmitu  $T_1$  a  $T_2$  k oběma osám. Tato operace má ovšem smysl, jen když použijeme k stanovení polohy závaží posuvku.

Jsou-li obě periody dostatečně blízké, můžeme použít pro výpočet tíhového zrychlení ze vztahu (8) jednu z naměřených hodnot anebo průměr z takto získaných hodnot (promyslete si sami). Kritériem blízkosti je srovnatelnost rozdílů period s diferencí periody odpovídající posunutí závaží o nejistotu, s jakou lze závaží nastavit na danou pozici.

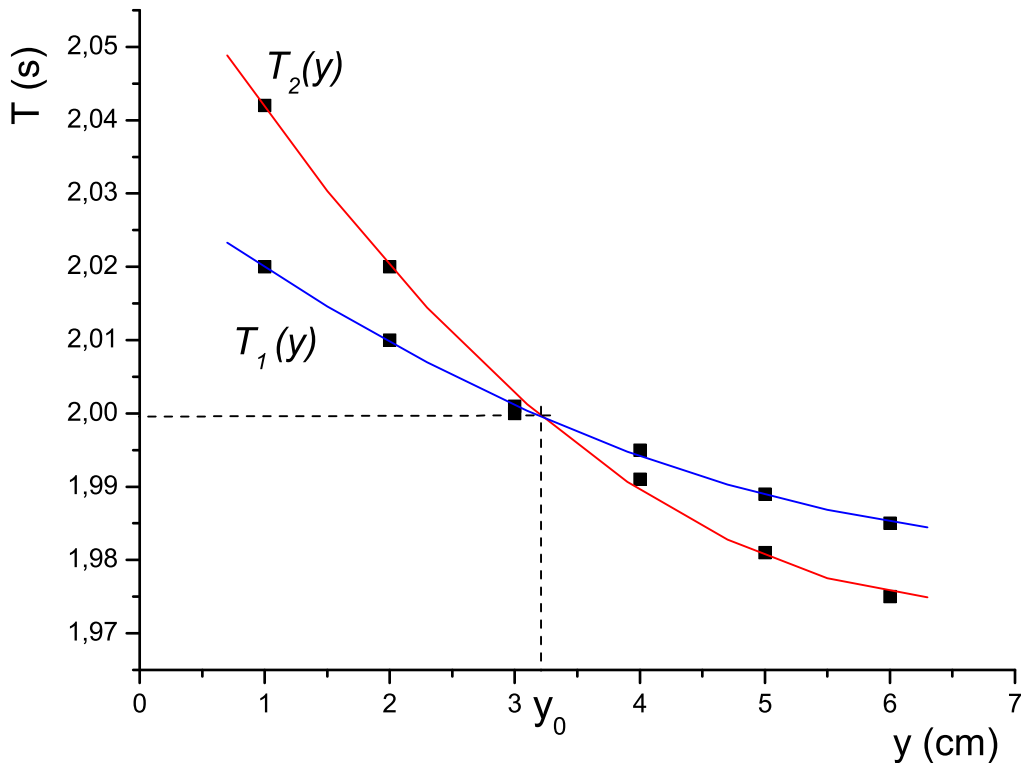
Pro úspěšné provedení celého měření je nutné během praktika zkonstruovat graf  $T(y)$  a získat hodnotu  $y_0$  (viz obr. 2). K dispozici je počítač s programem *QtiPlot*.

### 1.4 Měření času pomocí počítače

Doby kmitu kyvadla měříme pomocí optické závory, připojené na sériový port počítače. Při průchodu kyvadla závorou dojde k zastínění fotodiody a ke zvýšení jejího odporu (je zapojena v závěrném směru). K záznamu průchodů kyvadla závorou a ke stanovení doby kmitu slouží program *Stopky*. Po rozkmitání kyvadla spustíme měření tlačítkem Start. Program registruje jednotlivé průchody, měří jejich časy  $t_i$  a vynáší je do grafu. Rozlišuje průchody tam a zpět. Po zaznamenání asi deseti průchodů prokládá body v grafu lineární závislosti

$$t(i) = b_0 + b_1 i$$

kde  $t$  je čas průchodu a  $i$  index průchodu, a vypisuje parametry  $b_0$  a  $b_1$  stanovené metodou nejmenších čtverců. Časy průchodů lze v programu uložit do textového souboru a nezávisle vyhodnotit např. v programu *QtiPlot*.



Obrázek 2: Ukázka nalezení polohy závaží se stejnou dobou kmitu  $T_1$ ,  $T_2$ .

### Před měřením odpovězte na otázku:

Jak se stanoví doba kmitu a její nejistota z parametrů  $b_0$  a  $b_1$ ? Uvažte, že směrnice přímky je rovna

$$b_1 = \frac{t(i + \Delta i) - t(i)}{\Delta i}.$$

## 1.5 Měření redukované délky

Za osu otáčení můžeme v prvním přiblížení brát hranu břitu. Přesnější určení polohy vyžaduje kinematickou analýzu závěsu. Nejistotu určení redukované délky v důsledku této aproximace lze odhadnout na 0,05 mm.

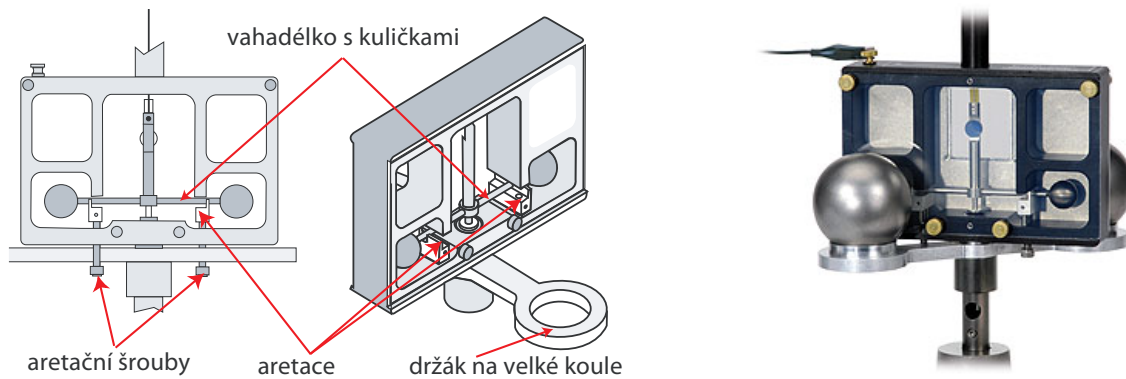
## 2 Měření gravitační konstanty Cavendishovou metodou

### 2.1 Gravitační síla

Každé dvě částice o hmotnosti  $m_1$  a  $m_2$  ve vzdálenosti  $r$ , které lze považovat s dostatečnou přesností za hmotné body, se přitahují silou danou Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (10)$$

kde  $\kappa$  je gravitační konstanta ( $\kappa = 6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  s relativní nejistotou udávanou v současné době (leden 2012) na  $1,2 \cdot 10^{-4}$ ). Stejný vztah platí i pro tělesa s kulově symetrickým rozložením hustoty,  $r$  pak představuje vzdálenost středů kulové symetrie těles.



Obrázek 3: Cavendishovy torzní váhy, nákres a skutečná realizace. Výroba Pasco Scientific.

Pro představu o velikosti této síly uvažujme dvě koule o hmotnosti 1 kg ve vzdálenosti středů 0,1 m. Výsledná síla bude podle Newtonova gravitačního zákona rovna  $6,67 \cdot 10^{-9}$  N. To odpovídá tíhové síle působící na závaží o hmotnosti 0,667 ng.

Z toho je zřejmé, že tak malou sílu lze na pozadí tíhové síly měřit jen obtížně. Pro představu: znamenalo by to, že váhy s jednokilogramovým závažím na misce zváží hmotnost přidaného přivažku 0,667 ng, tj. relativní citlivost vah by byla lepší než  $10^{-13}$ .

Avšak pohyb, který by tato síla sama o sobě způsobila, měřitelný je. Například za 100 s by síla rovnoměrně zrychleným pohybem posunula koule o hmotnosti 1 kg o  $\approx 33 \mu\text{m}$ .

Problém je zjevně v separaci této malé síly od ostatních sil, od dominantní tíhové síly (hmotnost Země  $5,9736 \cdot 10^{24}$  kg, poloměr 6 378 km), od parazitní elektrostatische nebo obecně elektromagnetické síly, a dále od rušivých vlivů, jako jsou vibrace a cirkulace vzduchu.

Jedna z konstrukcí, která těmto požadavkům vyhovuje, se nazývá Cavendishovy torzní váhy.<sup>2</sup>

## 2.2 Cavendishova metoda torzních vah

Měřenou veličinou u Cavendishových vah je moment sil  $M_{\text{grav}}$  od gravitační interakce mezi dvěma hmotnými koulemi a dvojicí malých kuliček spojených tyčkou („činka“) zavěšených v těžišti na torzním vlákně (viz obr. 3). Zatímco tíhová síla namáhá vlákno v tahu, gravitační interakce mezi koulemi namáhá vlákno v torzi. Vhodným uspořádáním lze dosáhnout velké tuhosti závěsu ve směru tíhové síly, a přitom minimální tuhosti neboli direkčního momentu v krutu.

Úhlové zkroucení závěsu  $\varphi$  je doprovázeno vratným silovým momentem  $M$

$$M(\varphi) = -D\varphi, \quad (11)$$

kde  $D$  je právě veličina zvaná direkční moment.

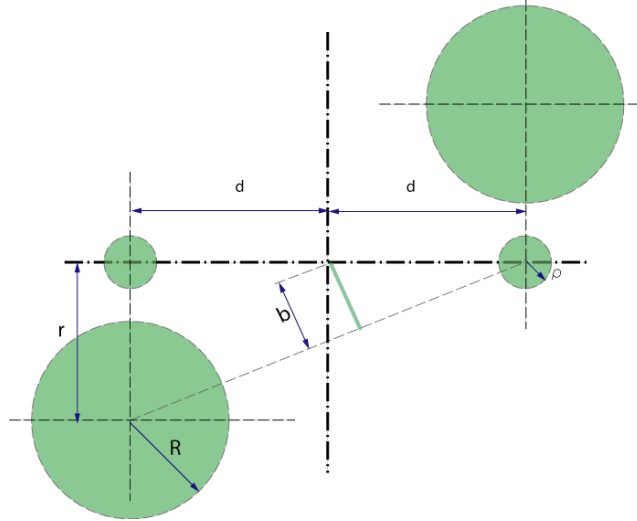
Dvě stejné kuličky o hmotnosti  $m$  a poloměru  $\rho$ , které jsou spojené vahadélkem zanedbatelné hmotnosti při vzájemné vzdálenosti jejich středů  $2d$ , mají vzhledem k ose závěsu moment setrvačnosti

$$J = 2m\left(\frac{2}{5}\rho^2 + d^2\right) \quad (12)$$

a na závěsu tak tvoří tlumený torzní harmonický osilátor, jehož volné kmity jsou popsány diferenciální rovnicí

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = M_{\text{grav}}, \quad (13)$$

<sup>2</sup>I když sám Cavendish nebyl vynálezcem těchto vah.



Obrázek 4: K určení momentu gravitačních sil.

$\gamma$  je konstanta úměrnosti mezi brzdícím momentem a úhlovou rychlostí otáčení.

Řešením diferenciální rovnice jsou tlumené harmonické kmity

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi) + \varphi_0, \quad (14)$$

kde

$$\beta = \frac{\gamma}{2J} \text{ je koeficient tlumení,} \quad (15)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \text{ je úhlová frekvence tlumeného kmitání,} \quad (16)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \text{ je úhlová frekvence netlumeného kmitání.} \quad (17)$$

V experimentu vliv tlumení zanedbáme, a tedy  $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ . Odhad chyby způsobené touto aproximací je proveden v příloze A. Zanedbáme-li dále proměnnost momentu gravitačních sil  $M_{\text{grav}}$  během torzních kmitů vahadélka, viz příloha C, moment způsobuje pouze posun rovnovážné polohy

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{grav}}}{D}. \quad (18)$$

Známe-li  $D$  a posun rovnovážné polohy  $\varphi_0$ , můžeme určit velikost momentu gravitačních sil a při znalosti hmotnosti koulí a geometrických poměrů i gravitační konstantu.

**Velikost momentu gravitačních sil** Moment gravitačních sil má směr závěsu. Vzhledem k symetrii stačí spočítat moment jen od jedné velké koule a výsledek násobit dvěma. Dále je zapotřebí vzít v úvahu, že velká koule působí na obě kuličky a že momenty těchto sil jsou orientovány proti sobě. Pro velikost momentu pak dostaneme

$$M_{\text{grav}} = 2\kappa (M m) d \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (19)$$

Vyjádříme-li  $r$  jako díl  $d$

$$r = \xi d, \quad (20)$$

pak pro relativní odchylku momentu se započítáním vlivu vzdálené koule od momentu bez tohoto vlivu dostaneme

$$\delta M = \frac{M - M_0}{M_0} = -\frac{\xi^3}{(4 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (21)$$

Je-li  $r = d$ , pak

$$\delta M = -\frac{1}{(4 + 1)^{\frac{3}{2}}} \approx -9\%. \quad (22)$$

**Vlastnosti závěsu** Klíčovým prvkem Cavendishových vah je vlákno závěsu. Tuhost vlákna v krutu (direkční moment  $D$ ) musí být pro dosažení potřebné citlivost co nejmenší.

Direkční moment  $D$  závěsu v podobě vlákna kruhového průřezu o poloměru  $\sigma$  a délce  $l$  z materiálu s modulem pružnosti v torzi  $G$  je roven (viz úloha č. 5 Měření modulu pružnosti)

$$D = \frac{G\pi\sigma^4}{2l}. \quad (23)$$

Závěs však obecně nemusí být z vlákna kruhového průřezu. Např. u aparatury v této úloze má formu úzkého pásku a jeho direkční moment je určen jiným vztahem.

Nosnost vlákna je uměrná průřezu. Konstanta úměrnosti  $f$  je mezní napětí v tahu s určitou technickou rezervou. Minimální poloměr  $\sigma$  je pro dvojici kuliček o hmotnosti  $2m$  dán vztahem

$$\pi\sigma^2 f = 2mg, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2mg}{\pi f}} \quad (24)$$

Dosazením do (23) dostaneme

$$D = \frac{G\pi\left(\frac{2mg}{\pi f}\right)^2}{2l} = \frac{2m^2g^2}{\pi l} \left(\frac{G}{f^2}\right) \quad (25)$$

Velikost momentu gravitační síly je dána vztahem (19). Pro účely následující úvahy zjednodušíme výraz na

$$M_{\text{grav}} = 2\kappa d \frac{(Mm)}{r^2} \quad (26)$$

Velikost výchylky  $\varphi$  torzního závěsu bude podle (11) rovna

$$\varphi = \frac{M_{\text{grav}}}{D} = \frac{2\kappa d \frac{(Mm)}{r^2}}{\frac{2m^2g^2}{\pi l} \left(\frac{G}{f^2}\right)} = \kappa\pi \frac{dl}{g^2r^2} \left(\frac{M}{m}\right) \left(\frac{f^2}{G}\right) \quad (27)$$

Moment setrvačnosti dvojice závaží (12) zjednodušíme na

$$J = 2md^2. \quad (28)$$

A vyjádříme periodu netlumených kmitů

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2md^2}{\frac{2m^2g^2}{\pi l} \left(\frac{G}{f^2}\right)}} = 2\pi\frac{d}{g}\sqrt{\left(\frac{f^2}{G}\right)\frac{\pi l}{m}}. \quad (29)$$

Cílem konstruktéra je maximalizovat výraz (27) s tím, že perioda vlastních kmitů by měla být co nejnížší, aby bylo časově schůdné nalézt z průběhu výchylky posunutí rovnovážné polohy (elementárně např. metodou tří kyvů), viz výraz (29).

Jak je vidět, pokud je s hmotností vahadélka upravován průřez vlákna tak, aby bylo vždy namáháno stejným napětím (platnost vztahu (24) pro pevně zvolené  $f$ ), citlivost je *nepřímo* úměrná hmotnosti kuliček vahadélka. Perioda vlastních kmitů je nepřímo úměrná její druhé odmocnině. Snižování hmotnosti pohyblivé části má své meze dané výrobními možnostmi tažení velmi tenkých vláken.

Zvětšováním vzdálenosti  $d$  kuliček vahadélka zvyšujeme citlivost lineárně, ale stejně roste i perioda vlastních kmitů. Optimální je maximalizovat parametr  $\frac{f^2}{G}$ , kde větší váhu má praktická mez pevnosti v tahu, než Youngův modul pružnosti ve smyku.

Citlivost roste lineárně také s délkou závěsu  $l$ , perioda jen s její druhou odmocninou, což je výhodné, ale i prodlužování délky závěsu má své limity, které nejsou už tak zřejmé a jsou z části technické povahy.

Pokud jde o závislost citlivosti na hmotnosti vnějších koulí, dokud nedojde ke vzájemné fyzické kolizi interagujících koulí, citlivost roste úměrně jejich hmotnosti. Pokud je nutno vzdalovat polohu středu velkých koulí od malých, je třeba vzít v úvahu, že působí na obě z dvojice kuliček na vahadélku. Z geometrického názoru je zřejmé, že momenty těchto sil jsou orientovány proti sobě a pro střed vnější koule v nekonečnu se vzájemně kompenzují bez ohledu na velikost sil.

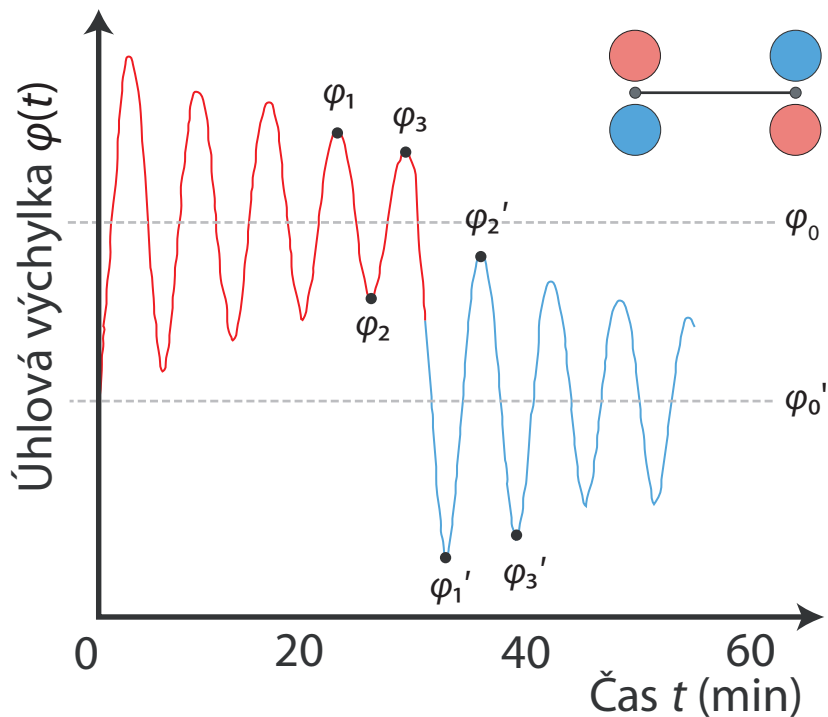
### 2.3 Popis aparatury

- Aparatura sestává z dvojice wolframových kuliček o poloměru  $\rho = 8,19$  mm a hmotnosti  $m = (38,3 \pm 0,2)$  g, ukotvených na vahadélku zanedbatelné hmotnosti ve vzdálenosti  $2d = 100$  mm.
- Vahadélko je zavěšeno na pásku z beryliové bronzi délky  $l = 260$  mm a průřezu  $2,55 \cdot 10^{-3}$  mm<sup>2</sup> ( $0,017 \times 0,150$  mm).
- Vnější wolframové koule o poloměru 27,6 mm a hmotnostech  $M = 1,5$  kg jsou umístěny otočně tak, že minimální vzdálenost jejich středů od těžiště malých koulí je  $r = 46,5$  mm. To odpovídá poloze, ve které se velké koule právě dotýkají stěny komory vahadélka.
- Vahadélko je pevně spojeno se zrcátkem, odrážející laserový paprsek. Jeho světelná stopa na stěně poskytuje informaci o úhlové výchylce vahadélka. Stěna s laserovou stopou je snímána IP kamerou se záznamem. Pro automatické nalezení stopy ve snímcích je připraven program *Cavendish.exe*.
- Soustava vahadélka, dvojice malých koulí a zrcátka je umístěna v zakrytované komoře (viz obr. 3).

### 2.4 Hlavní zásady

- Torzní Cavendishovy váhy jsou extrémně citlivé zařízení a vyžadují velmi jemné zacházení. Klíčovým prvkem je závěs z beryliové bronzi, který nese vahadlo s wolframovými kuličkami o celkové hmotnosti 76,6 g, toto zatížení vytváří v závěsu napětí v tahu přibližně 300 MPa. Mez pevnosti beryliové bronzi dosahuje až 1300 MPa, takže statická rezerva je dostatečná. To však neplatí pro dynamické namáhání, protože systém je velmi tuhý a tedy schopnost závěsu absorbovat energii je velmi malá. **I slabý náraz může vést k destrukci závěsu!**
- Vlastní frekvence torzních kmitů s relativně slabým tlumením je cca 8 minut. Je tedy třeba se vyvarovat takové manipulace, která kmity budí. **Jakákoliv jiná manipulace s vahami s výjimkou přesunutí velkých wolframových koulí je zakázána!** Aparatura je již seřízena podle manuálu k aparatuře.





Obrázek 5: Ke stanovení rovnovážné polohy metodou tří kyvů.  $\varphi_0 = [(\varphi_1 + \varphi_3)/2 + \varphi_2]/2$ ,  $\varphi_0' = [(\varphi_1' + \varphi_3')/2 + \varphi_2']$ .

## 2.5 Postup měření

Níže uvádíme postup měření v praktiku. Pokud bude oscilátor příliš rozkmitaný, měření lze zopakovat z domova (ideálně v noci). Detailní popis toho, jak se připojit ke kameře z domova, je uveden na interaktivní osnově.

1. Na počítači spusťte prohlížeč Chrome a otevřete www stránku [webcamfp1.physics.muni.cz](http://webcamfp1.physics.muni.cz). Po přihlášení (jméno a heslo naleznete v praktiku), můžete nastavit zvětšení, obraz zaostřit, případně změnit další nastavení kamery, kupř. jas



→ Nastavení kamery → Brightness)

aby byla stopa dostatečně kontrastní. Na PC spusťte VLC Media Player. V záložce Média zvolte otevřít síťový proud a zvolte z možností

`rtsp://jmeno:heslo@webcamfp1.physics.muni.cz/h264.`

Objeví se okno s obrazem z kamery a na disk se každých 10s uloží nový obrázek. Číslo souboru znamená pořadí uloženého snímku, snímací frekvence je 30 Hz. Snímky naleznete na počítači ve složce Dokumenty/Kamera. Před měřením staré snímky vymažte. (Aby VLC ukládal obrázky do složky, musí být zapnutý tzv. scene filter v Nástroje-Nastavení-Vše-Filtry. Formát jpg, ratio 300.)

2. Velmi opatrně nastavte otočný držák velkých koulí do jedné krajní polohy, která je určena dotykem wolframové koule se stěnou komory vahadla. Dávejte pozor, aby koule při manipulaci nenarazily do komory vahadélka. Sledujete laserovou stopu ukazatele na stupnici, jeho hodnotu přepočítejte na úhlovou výchylku vahadélka. Zaznamenejte tři po sobě jdoucí krajní polohy  $\varphi_1$ ,

$\varphi_2, \varphi_3$  (viz obr. 5). Polohu světelné stopy odečítejte automaticky v programu *Cavendish.exe*. Krajiní souřadnice oblasti pixelů, ve kterých má program bod vyhledávat, odečtete nejprve v programu IrfanView. Z naměřených hodnot určete metodou tří kyvů (viz příloha B), případně fitem, rovnovážnou polohu laserové stopy na stínítku  $\varphi_0$  pro jednu pozici vnějších koulí.

3. Přemístěte otočný držák do druhé symetrické polohy. Použijte motorický posun aktivovaný tlačítkem u kyvadla nebo tlačítkem Alarm na www stránce.
4. Změřte vlastní frekvenci torzních kmitů a ze vztahu (17) pomocí (12) určete směrný moment  $D$ .
5. Ze vztahu  $\varphi_0 - \varphi'_0 = 2\frac{M_{\text{grav}}}{D}$  určete moment gravitačních sil  $M_{\text{grav}}$  a ze vztahu (19) určete gravitační konstantu  $\kappa$ .
6. Po skončení měření zavřete VLC Media Player a vymažte snímky ze složky Kamera.

## Úkoly

1. Změřte gravitační konstantu Cavendishovými torzními vahami. Zapněte laser pro monitoring zrcátka vah a na počítači spusťte záznam pohybu oscilátoru. Po cca 15 minutách zkuste měření na zkoušku výhodnotit. Během záznamu kyvadla se můžete věnovat měření tíhového zrychlení.
2. Změřte tíhové zrychlení reverzním kyvadlem. Proměřte závislost  $T_1(y)$  a  $T_2(y)$  aspoň pro pět poloh závaží, sestrojte v programu *QtiPlot* graf a najděte polohu  $y_0$ . V jejím okolí změřte periodu kmitů podrobněji tak, abyste upřesnili průsečík křivek  $T_1(y)$  a  $T_2(y)$ . Změřte redukovanou délku kyvadla a stanovte hodnotu tíhového zrychlení včetně nejistoty. Porovnejte výsledek s místní hodnotou.

## A Stanovení směrného momentu tlumeného torzního oscilátoru

Mějme torzní oscilátor v podobě dvou kuliček na vahadélku zavěšených na vlákně. Vzdálenost středů kuliček je  $2d$ . Vahadélko na závěsu vykonává tlumené torzní kmity popsané diferenciální rovnicí

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = 0, \quad (30)$$

jejím řešením je

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi) + \varphi_0, \quad (31)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2J}, \quad (32)$$

$\varphi_m$  je amplituda a  $\varphi_0$  rovnovážná poloha. Z periody těchto kmitů

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{J} - \beta^2}} \quad (33)$$

lze určit směrný moment

$$D = J \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\beta}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (34)$$

Zanedbáním druhého členu v rovnici (34) se dopustíme relativní chyby

$$\frac{\delta D}{D} \approx \left( \frac{\beta}{\omega} \right)^2. \quad (35)$$

## Určení koeficientu tlumení $\beta$ z tlumených kmitů

Tlumené harmonické kmity jsou popsány vztahem (31). Poměr amplitud po  $n$  periodách je

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)} = \frac{\varphi_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi)}{\varphi_0 e^{-\beta(t+nT)} \sin(\omega(t+nT) + \psi)} = e^{\beta n T}. \quad (36)$$

Odtud pro  $\beta$  plyne

$$\beta = \frac{1}{nT} \ln \left( \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)} \right). \quad (37)$$

Pokud například poklesne amplituda za 1 hodinu na  $\frac{1}{2}$ , je  $\beta \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Je-li perioda kmitů 8 min, pak podle vztahu (35) je relativní chyba  $\frac{\delta D}{D} \approx 2 \cdot 10^{-4}$ .

## B Určení rovnovážné polohy metodou tří kyvů

V některých případech, např. u slabě tlumeného harmonického oscilátoru, je nepraktické čekat na utlumení kmitů a je zapotřebí určit neznámou rovnovážnou polohu během kmitání oscilátoru. K tomu slouží metoda tří kyvů. Vyjdeme z rovnice (31). Pro vhodně zvolený počátek fáze a měření času platí pro tři po sobě následující krajní polohy

$$\varphi_1 = \varphi(0) = \varphi_m + \varphi_0, \quad \varphi_2 = \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = -\varphi_m e^{-\beta \frac{T}{2}} + \varphi_0, \quad \varphi_3 = \varphi(T) = \varphi_m e^{-\beta T} + \varphi_0, \quad (38)$$

kde  $\varphi_m$  je amplituda,  $\varphi_0$  rovnovážná poloha. Označme

$$\alpha = e^{-\beta \frac{T}{2}}, \quad \text{tj. } \alpha^2 = e^{-\beta T} \quad (39)$$

a rovnice (38) přepíšeme s pomocí (39) na

$$\varphi_1 = \varphi_m + \varphi_0 \quad (40)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_m \alpha + \varphi_0 \quad (41)$$

$$\varphi_3 = \varphi_m \alpha^2 + \varphi_0. \quad (42)$$

Od rovnice (40) odečteme rovnici (41) a od rovnice (42) znovu rovnici (41)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_m(1 + \alpha) \quad (43)$$

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_m \alpha(1 + \alpha). \quad (44)$$

Rovnici (44) podělíme rovnicí (43)

$$\alpha = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (45)$$

Rovnice (40) vynásobme  $\alpha$  a sečteme s rovnicí (41)

$$\varphi_1 \alpha + \varphi_2 = \varphi_0(1 + \alpha). \quad (46)$$

Vyjádříme  $\varphi_0$  a dosadíme za  $\alpha$  z (45)

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 \varphi_3 - \varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2}. \quad (47)$$

Pokud je  $\beta T$  malé číslo, můžeme přibližně psát

$$\alpha = e^{-\beta \frac{T}{2}} \approx 1 - \beta \frac{T}{2}, \quad \alpha^2 = e^{-\beta T} \approx 1 - \beta T. \quad (48)$$

Potom rovnice (40) a (41) a (42) mají tvar

$$\varphi_1 = \varphi_m + \varphi_0 \quad (49)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_m \left( 1 + \beta \frac{T}{2} \right) + \varphi_0 \quad (50)$$

$$\varphi_3 = \varphi_m(1 + \beta T) + \varphi_0. \quad (51)$$

Sečteme rovnici (49) s rovnicí (51) a vyjádříme  $\varphi_0$

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} - \varphi_m \left( 1 + \beta \frac{T}{2} \right). \quad (52)$$

Dosadíme-li za  $\varphi_m(1 + \beta \frac{T}{2})$  z (50)

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} + \varphi_2 - \varphi_0, \quad (53)$$

pro neznámou rovnovážnou polohu  $\varphi_0$  dostaneme zjednodušený vztah

$$\varphi_0 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} + \varphi_2 \right). \quad (54)$$

Změříme-li tedy souřadnice tří po sobě následujících kyvů (například úhlovou výchylku nebo polohu ukazatele na stínítku), dostaneme pomocí vztahu (47), případně (54) (za předpokladu, že se jedná o slabě tlumený harmonický pohyb), souřadnici rovnovážné polohy oscilátoru.

## C Vliv momentu gravitačních sil na vlastní frekvenci torzního oscilátoru

Předpokládejme pro přehlednost, že moment gravitačních sil je dán pouze interakcí velké koule s bližší kuličkou. Dále předpokládejme, že vzdálenost  $r_0$  malé kuličky od velké odpovídá rovnovážné poloze mezi momentem nakrouceného vlákna a momentem gravitačních sil

$$M_{\text{grav}}(r_0) - D\varphi_0 = 0. \quad (55)$$

Pokud vahadélko osciluje malými kmity, platí pro vzdálenost malé kuličky od velké

$$r = r_0 + \delta r, \quad (56)$$

$$\delta r = -\delta\varphi d, \quad (57)$$

$d$  je vzdálenost středu kuličky od osy torzních kmitů,  $\delta\varphi$  je výchylka malých torzních kmitů v úhlové míře. Zvětší-li se úhlová výchylka, kuličky se k sobě přiblíží,  $\delta r$  je tedy záporné.

Moment gravitačních sil je pak

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) = \kappa d \frac{Mm}{(r_0 + \delta r)^2}. \quad (58)$$

Omezíme-li se v Taylorově rozvoji na lineární člen, dostaneme

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) \approx \kappa d \frac{Mm}{(r_0)^2} - 2\kappa d \frac{Mm}{(r_0)^2} \frac{\delta r}{r_0}, \quad (59)$$

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) \approx M_{\text{grav}}(r_0) - M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2\delta r}{r_0}. \quad (60)$$

Dosazením za  $\delta r$  z (57)

$$M_{\text{grav}}(r_0 + \delta r) \approx M_{\text{grav}}(r_0) + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d\delta\varphi}{r_0}. \quad (61)$$

Nachází-li se vahadélko v blízkosti gravitující koule, je třeba diferenciální rovnici pro tlumené kmity (30) upravit. Malé kmity vahadélka vztáhneme k rovnovážné poloze v gravitačním poli koule podle rovnice (55)

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi. \quad (62)$$

Dále doplníme mmoment gravitačních sil podle (61)

$$J \frac{d^2(\varphi_0 + \delta\varphi)}{dt^2} + \gamma \frac{d(\varphi_0 + \delta\varphi)}{dt} + D(\delta\varphi + \varphi_0) = M_{\text{grav}}(r_0) + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2\delta\varphi d}{r_0}. \quad (63)$$

Po úpravě

$$J\delta\ddot{\varphi} + \gamma\delta\dot{\varphi} + D\delta\varphi = -D\varphi_0 + M_{\text{grav}}(r_0) + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2\delta\varphi d}{r_0}. \quad (64)$$

Upravíme za použití (55) a dostaneme rovnici pro tlumené harmonické kmity oscilátoru

$$J\delta\ddot{\varphi} + \gamma\delta\dot{\varphi} + \left( D - M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d}{r_0} \right) \delta\varphi = 0. \quad (65)$$

Konstantní moment vypadl v souladu s tím, že Taylorův rozvoj byl proveden kolem bodu rovnováhy mezi momentem gravitační síly a vratným momentem vlákna. Je vidět, že efektivní hodnota direkčního momentu  $D^*$  je menší

$$D^* = D - M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d}{r_0}. \quad (66)$$

Dynamická metoda měření direkčního momentu vlákna je tedy pro případ, že se vahadélko nachází pod výraznějším vlivem vnějších koulí, zatížena systematickou chybou. Její relativní hodnota je

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{M_{\text{grav}}(r_0)}{D} \frac{2d}{r_0}. \quad (67)$$

Dosadíme-li za  $\frac{M_{\text{grav}}(r_0)}{D}$  z rovnice (55), dostaneme

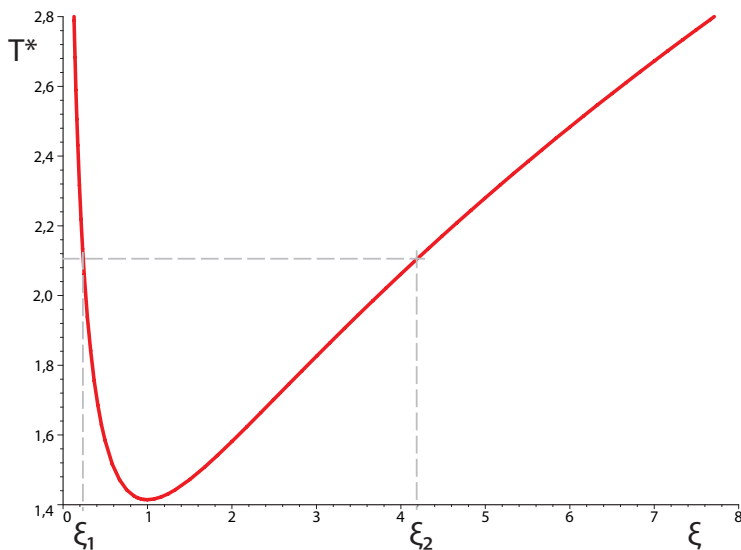
$$\frac{\delta D}{D} = \frac{2d}{r_0} \varphi_0. \quad (68)$$

Explicitně jsme uvažovali jen jednu vnější kouli, ale výsledek platí i pro dvojici vnějších koulí. Při výpočtu jsme zanedbali efekt interakce se vzdálenější koulí a předpokládali jsme, že spojnice malé a velké kuličky je kolmá na vahadélko. Systematická relativní chyba určení direkčního momentu vlákna dynamickou metodou v důsledku gravitační interakce s blízkou koulí je úměrná vychýlení rovnovážné polohy v obloukové míře v důsledku této interakce. Z geometrických poměrů vyplývá, že konstanta úměrnosti  $2d/r_0$  je velmi přibližně rovna 2.

Tuto chybu je možné částečně korigovat. S využitím (55) upravíme rovnici (66)

$$D = D^* + M_{\text{grav}}(r_0) \frac{2d}{r_0} = D^* + D\varphi_0 \frac{2d}{r_0} \approx D^* + D^*\varphi_0 \frac{2d}{r_0} = D^* \left( 1 + \varphi_0 \frac{2d}{r_0} \right). \quad (69)$$

Vzhledem k tomu, že ve vztahu pro gravitační konstantu  $\kappa$  vystupuje direkční moment lineárně, přenáší se tato relativní chyba i do relativní chyby určení gravitační konstanty.



Obrázek 6: Bezrozměrná perioda kyvadla jako funkce bezrozměrné vzdálenosti osy otáčení od těžiště.

**Závěr.** Přes možnost částečně početně korigovat vliv gravitujících koulí je samozřejmě správnější, pokud to časové možnosti experimentu dovolí, nespojovat měření direkčního momentu závěsu s měřením posuvu rovnovážné polohy, ale povést ho v uspořádání bez gravitujících koulí.

## D Odvození vztahu pro redukovanou délku a pro periodu fyzického kyvadla

Vyšetřeme nyní závislost periody fyzického kyvadla na vzdálenosti  $x$  osy otáčení od osy procházející těžištěm. Moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm označme  $J_0$ . Pro periodu v aproximaci nulových kmitů dostaneme

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mx^2}{mgx}}. \quad (70)$$

Pro znázornění závislosti periody na vzdálenosti osy vůči těžišti je výhodné zavést bezrozměrné parametry

$$a_0^2 = \frac{J_0}{m}, \quad \xi = \frac{x}{a_0}, \quad T^* = \frac{T}{2\pi \sqrt{\frac{a_0}{g}}}. \quad (71)$$

Pro bezrozměrnou periodu  $T^*$  potom dostaneme jednoduchou funkci

$$T^* = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi}}, \quad (72)$$

jejíž průběh je vykreslen na obrázku 6. Z uvedeného vztahu a grafu je zřejmé, že perioda má minimum pro bezrozměrný parametr  $\xi = 1$ . Pro tuto hodnotu parametru je moment setrvačnosti těžiště vůči ose otáčení roven momentu setrvačnosti  $J_0$  kyvadla vzhledem k ose procházející těžištěm. Dále je zřejmé, že pro každou delší periodu existují dvě různé vzdálenosti  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  os otáčení, které jsou řešením kvadratické rovnice

$$T^{*2} = \frac{1 + \xi^2}{\xi}, \text{ tedy } \xi^2 - T^{*2}\xi + 1 = 0 \quad (73)$$

$$\xi_1 = \frac{T^{*2}}{2} + \sqrt{\frac{T^{*4}}{4} - 1}, \quad \xi_2 = \frac{T^{*2}}{2} - \sqrt{\frac{T^{*4}}{4} - 1}. \quad (74)$$

Sečteme-li obě řešení, dostaneme bezrozměrnou tzv. redukovanou délku kyvadla, která je přímo rovna kvadrátu bezrozměrné periody

$$\xi_1 + \xi_2 = 2 \frac{T^{*2}}{2} = T^{*2}. \quad (75)$$

Dosadíme-li za bezrozměrnou periodu, dostaneme po úpravě

$$\xi_1 + \xi_2 = T^{*2} = \frac{T^2}{(2\pi)^2 \frac{a_0}{g}}, \quad T^2 = (2\pi)^2 \frac{(\xi_1 + \xi_2)a_0}{g} = (2\pi)^2 \frac{(x_1 + x_2)}{g} \quad (76)$$

Označíme-li redukovanou délkou  $l = x_1 + x_2$ , obdržíme pro periodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (77)$$

formálně shodný vztah (77) se vztahem pro matematické kyvadlo, kde už nevystupují obtížně zjistitelné veličiny jako  $J$  a  $x$ . Tento vztah je tedy vhodný pro určení tíhového zrychlení.

## E Profesionální měření gravitační konstanty

Metoda Cavendishových vah se s užitím různých vylepšení a modifikací pro měření gravitační konstanty stále používá a měření gravitační konstanty je i v dnešní době otevřené a aktuální téma. V posledních letech bylo totiž provedeno několik nezávislých experimentů pro zjištění gravitační konstanty s vysokou přesností za užití různých měřicích technik. Překvapivě ne všechna tato měření se mezi sebou shodují.

Přehled těchto měření lze nalézt na stránce [1]. V roce 2000 např. publikovali Gundlach a Merkwitz [2] výsledky měření založeného na vylepšené Cavendishově metodě s výsledkem  $\kappa = 6,674 215 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $1,4 \cdot 10^{-5}$ . Tato hodnota byla v dobré shodě s dalším měřením publikovaným v roce 2006 Schlammingerem a kolektivem [3], které bylo založeno na jiném měřicím postupu. V roce 2009 publikoval Luo a kolektiv [4] měření gravitační konstanty založené na zjištění doby kmitů torzního kyvadla pro různé vzdálenosti budících hmot s výsledkem  $\kappa = 6,673 49 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  a standardní relativní nejistotou  $2,6 \cdot 10^{-5}$ . Toto měření se přes veškeré úsilí o nalezení systematických chyb neshoduje s měřením Gundlacha a Merkwitze. Další měření publikované v roce 2010 Fallerem a Parksem [5] dává dokonce ještě nižší hodnotu konstanty  $\kappa = 6,672 34 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $2,1 \cdot 10^{-5}$ . Jejich metoda je založena na interferometrickém měření výchylky kyvadel vystavených gravitačnímu působení zdrojové hmoty a jejich výsledek se neshoduje ani s Gundlachem a Merkwitzem ani s Luem.

Rozdíly jednotlivých výsledků jsou patrně způsobeny systematickými chybami, které se objevily v důsledku nezapočtení některých ne zcela očividných vlivů. Nalezení těchto vlivů je otevřeným problémem.

Hodnota gravitační konstanty uvedená v návodu k praktiku, tj.  $\kappa = 6,673 84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $1,2 \cdot 10^{-4}$ , je hodnota publikovaná v CODATA 2010. Tato hodnota již zohledňuje některá výše uvedená měření. (Pro zajímavost hodnota publikovaná v CODATA 2006 je  $\kappa = 6,674 28 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  se standardní relativní nejistotou  $10^{-4}$ .)

## Literatura

1. <http://scienceblogs.com/principles/2010/08/measuring-gravity-aint-nothin.php>
2. J. H. Gundlach and S. M. Merkowitz, „Measurement of Newton’s Constant Using a Torsion Balance with Angular Acceleration Feedback,“ *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 2869-2872 (2000)
3. St. Schlamminger, E. Holzschuh, W. Kündig, F. Nolting, R. E. Pixley, J. Schurr, U. Straumann, „Measurement of Newton’s gravitational constant,“ *Phys. Rev. D*, vol. 74, 082001 (2006)
4. J. Luo, Q. Liu, L. Tu, C. Shao, L. Liu, S. Yang, Q. Li, Y. Zhang, „Determination of the Newtonian Gravitational Constant G with Time-of-Swing Method,“ *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, 240801 (2009)
5. H. V. Parks, J. E. Faller, „A Simple Pendulum Determination of the Gravitational Constant,“ *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, 110801 (2010), <http://xxx.lanl.gov/abs/1008.3203>
6. J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a mat. tabulky, SNTL, Praha, 1980