Astronomické pozorování

Výpočet polohy planety

Filip Hroch

ÚTFA,Přírodovědecká fakulta MU, Brno, CZ

březen 2005

Zadání březnového tématu

Březnové téma je věnováno klasické sférické astronomii. Úkol se skládá z měření, výpočtu a porovnání výsledků získaných v obou částech. Jako objekt vhodný ke studiu byla vybrána planeta Saturn vzhledem k její výhodné poloze na večerní obloze.

Měření

Úkolem je změřit polohu Saturnu na obloze následujícími postupy:

- Za pomocí jednoduchého úhloměru, který se drží v natažené paži, změřit polohu od nejbližších hvězd.
- Sextantem. Opět se měří se poloha od hvězd v okolí.
- Teodolitem. Měří se vzájemná poloha ovšem přímo v azimutálních souřadnicích.

Výpočet

Úkolem je vypočíst polohu Saturnu pro okamžik měření na základě dráhových elementů planety.

Úvodní úvahy

Základem výpočtu polohy planety na obloze je znalost zákonů, které popisují jejich chování, číselné hodnoty elementů dráhy a časový okamžik, pro který polohu počítáme. Všechny tyto údaje můžeme snadno zjistit, neboť jsou výsledkem úsilí našich předchůdců.

Pohyby planet ve sluneční soustavě jsou popsány s dostatečnou přesností pomocí Keplerových zákonů. Elementy dráhy popisují tvar dráhy planetky a její orientaci v prostoru. My pak jen musíme zjistit jaká je poloha planety v prostoru v čase, kdy ji pozorujeme z povrchu Země.

Postup výpočtu

Postup výpočtu je následující (jednotlivé kroky budeme dále zjemňovat):

1. Zjištění elementů a dalších údajů z ročenky.
2. Výpočet polohy planety ve dráze, řešení Keplerovy rovnice.
3. Výpočet heliocentrických ekliptikálních souřadnic tělesa.
4. Výpočet polohy Země a přepočet heliocentrických souřadnic na geocentrické.
5. Výpočet rovníkových souřadnic tělesa.

Dráhové elementy

K teoretickému výpočtu polohy planety je třeba znát šest elementů dráhy planety. Velká poloosa a společně s excentricitou e popisují tvar elipsy po které planeta obíhá. Střední anomálie M_0 je fázový úhel určitého význačného okamžiku. Úhly ϖ (délka perihélia), i (sklon dráhy vůči ekliptice) a Ω (délka výstupního uzlu) pak určují orientaci elipsy v prostoru.

V ročence na rok 2005 lze nalézt následující číselné hodnoty pro elementy dráhy Saturnu pro okamžik JD: $t = 2\,453\,560.0$ UT):

Velká poloosa dráhy	a	9.56423 AU
Střední anomálie	M_0	23.345°
Excentricita	e	0.05566
Délka perihélia	ϖ	94.280°
Sklon dráhy	i	2.4865°
Délka výstupního uzlu	Ω	113.625°
Střední denní pohyb	n	0.033327°

Definice soustavy souřadnic

V astronomii se z historických důvodů používá soustava souřadnic v jejímž počátku je Slunce, rovina $x - y$ je totožná s ekliptikou a osa z je na ni kolmá. Kladný směr osy x udává orientaci této soustavy souřadnic, vzhledem ke statickému hvězdnému pozadí. Míří do souhvězdí Ryb k takzvanému Jarnímu bodu, ve kterém se nachází střed slunečního kotouče v okamžiku Jarní rovnodenosti. Rovníkové souřadnice tohoto bodu jsou $\alpha = 0, \delta = 0$. Planety obíhají ve směru matematického kladu a stejně tak narůstá i polární úhel.
[inputsouradnice.pdf]

Výpočet střední anomálie

Střední anomálie je úhel mezi průvodičem planety obíhající po virtuální kružnici a přímkou apsid. Pro libovolný okamžik v rámci daného roku lze její aktuální hodnotu spočítat jako

$$M(t) = M_0 + n(t - t_0) \tag{1}$$

kde M_0 je hodnota pro čas t_0. K výpočtům rozdílů se používá Juliánské datum. Například pro půlnoc 11. března 2005 je JD = 2 453 440.5 a podle údajů z ročenky dostaneme M = 19.36242°.

Odhad polohy

Planety obíhají po elipsách málo odlišných od kružnic. Proto můžeme odhadnout polohu planety ve sluneční soustavě v pravoúhlých souřadnicích pomocí jednoduchého triku. Víme, že rovnice kružnice v pravoúhlých souřadnicích je

$$X = R \sin M(t) \tag{2}$$

$$Y = R \cos M(t) \tag{3}$$

kde za R dosadíme průměrnou hodnotu velké a malé poloosy a $M(t)$ je střední anomálie počítana v čase, který nás zajímá t.
Pro Saturna dostáváme
$R = (a+b)/2 = a(1+\sqrt{1-e^2})/2 = 9.557$ AU a $X \approx 9.016$ AU, $Y \approx 3.169$ AU.

Keplerova rovnice

Přesnou polohu planety dostaneme řešením Keplerovy rovnice

$$E - e \sin E = M \tag{4}$$

kde E označuje tzv. excentrickou anomálii, což je úhel mezi průvodičem ze středu elipsy planety (ne ohniskem) a přímkou apsid.
Z této rovnice nelze vyjádřit proměnnou E. Její řešení lze provést pouze numericky například iterační metodou:

1. Odhadneme přibližnou hodnotu řešení jako

$$E^{(0)} = M \tag{5}$$

2. Provedeme zpřesnění dosazením do Keplerovy rovnice

$$E^{(i+1)} = M + e \sin E^{(i)} \tag{6}$$

3. V iteracích pokračujeme tak dlouho, dokud rozdíl mezi posledními dvěma neklesne pod nějakou předem danou hodnotu

$$|E^{(i)} - E^{(i+1)}| < 10^{-x} \tag{7}$$

Poloha planety

Na základě znalosti E můžeme vypočíst všechny ostatní veličiny. Délka průvodiče (vzdálenost od Slunce):

$$r = a(1 - e\cos E) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\nu} \tag{8}$$

Pravá anomálie (úhel mezi průvodičem z ohniska elipsy planety a přímkou apsid.

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \tag{9}$$

Poloha v prostoru

Heliocentrické pravoúhlé ekliptikální souřadnice ($L \equiv \varpi + \nu - \Omega$):

$$\begin{aligned} X &= R(\cos\Omega\cos L - \sin\Omega\sin L\cos i) \\ Y &= R(\sin\Omega\cos L + \cos\Omega\sin L\cos i) \\ Z &= R\sin L\sin i \end{aligned} \tag{10}$$

Heliocentrické ekliptikální souřadnice

$$\begin{aligned} X &= R\cos B\cos\Lambda \\ Y &= R\cos B\sin\Lambda \\ Z &= R\sin B \end{aligned} \tag{11}$$

Rovinný 2D model sluneční soustavy

Protože všechny planety obíhají přibližně ve stejné rovinně nazývané ekliptika, je možné v prvním přiblížení omezit naše výpočty na dvou dimensionální model. Obvykle se tak dopustíme odchylky od správné polohy řádu několik desetin stupně. Tato odchylka je srovnatelná s měřící chybou při měřením sextantem. První výpočet polohy proto bude prováděn v rovinně ekliptiky. V tomto případě pokládáme $i \equiv 0$. Délka výstupního uzlu Ω ztrácí význam a délka perihela ϖ udává otočení elipsy vůči Jarnímu bodu. Pak je:

$$\begin{aligned} X &= R\cos(\varpi + \nu) \\ Y &= R\sin(\varpi + \nu) \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

Ekliptikální souřadnice pak jsou $\Lambda = \varpi + \nu, B = 0$.

Geocentrické souřadnice

Planety nepozorujeme ze Slunce, ale ze Země. Proto musíme přepočítat všechny souřadnice k jinému bodu. Na to potřebujeme znát polohu Země v pravoúhlých heliocentrických souřadnicích. Postup je analogický jako pro Saturn. Ovšem pro jiné hodnoty parametrů. Vzhledem k minimálnímu sklonu dráhy je možné i pro přesné výpočty použít 2D approximaci.

V ročence na rok 2005 lze nalézt následující číselné hodnoty pro elementy dráhy Země pro okamžik JD: $t = 2\ 453\ 560$ UT):

Velká poloosa dráhy	a	0.99999 AU
Střední anomálie	M_0	184.099°
Excentricita	e	0.01672
Délka perihélia	ϖ	102.860°
Sklon dráhy	i	0.0007°
Délka výstupního uzlu	Ω	175.291°
Střední denní pohyb	n	0.985625°

Výpočet geocentrických souřadnic

Řešením Keplerovy rovnice pro Saturn dostáváme heliocentrické pravoúhlé souřadnice X_s, Y_s, Z_s a jejím řešením pro Zemi pak X_z, Y_z, Z_z. Geocentrické souřadnice vzhledem k našemu pozorovacímu místu pak dostaneme posuvem počátku:

$$
\begin{aligned}
x &= X_s - X_z \\
y &= Y_s - Y_z \\
z &= Z_s - Z_z
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Geocentrické ekliptikální souřadnice pak z pravoúhlých vypočteme na základě vzorců:

$$
\begin{aligned}
x &= \Delta \cos\beta \cos\lambda \\
y &= \Delta \cos\beta \sin\lambda \\
z &= \Delta \sin\beta
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Převod ekliptikálních souřadnic na pravoúhlé

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\delta &= -\sin\beta\sin\epsilon + \cos\beta\cos\epsilon\sin\lambda \\ \cos\alpha\cos\delta &= \cos\beta\cos\lambda \\ \sin\delta &= \sin\beta\cos\epsilon + \cos\beta\sin\epsilon\sin\lambda \end{aligned} \qquad (14)$$

$\epsilon = 23.438641°$ je sklon ekliptiky k rovníku pro 1. ledna 2005.

Mapka sluneční soustavy

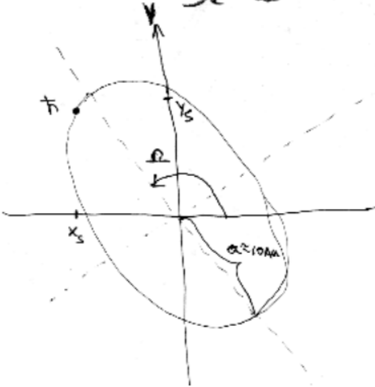
$x_e =$

$$x_e = r \cos(\Omega + \omega)$$

$$y_e = r \sin(\Omega + \omega)$$

$$\omega = \tilde{\omega} - \Omega + \nu$$

$$\Omega + \omega = \Omega + \tilde{\omega} - \Omega + \nu = \tilde{\omega} + \nu$$



$\lambda = 114.7$

$\beta = 0.048°$

$x_e = -3.79$ AU

$y_e = 8.231$ AU

$z = 0.0078$ AU

Zem

$\lambda = \ldots 165°$

$x =$