Fourierova transformace

Esej o fourierově transformaci? Esej o matematickém nástroji? No člověk se musí umět poprat s různým druhem úkolů, ať vypadají na první pohled sebeabsurdněji. Vždyť právě z takových různých absurdit se stávají velké vědecké objevy. Kdyby Rutherford z rozmaru nenařídil Geigerovi a Mersdenovi posunout detektor, nikdy by nevyvrátil pudingový model atomu ... ale zpět k Fourierově transformaci.
Původně jsem toužila po hezkém a jednoduchém úvodu, nesoucím se v duchu prohlášení „neumíš-li to vysvětlit šestiletému dítěti, nerozumíš tomu“. No ať jsem dělala, co jsem dělala, nenapadlo mě, jak bych nějakému prckovi Fouriera vysvětlila. Takže buď tomu nerozumím, nebo bych se příliš neměla stákat s dětmi. A nebo to můžu svést na názor mého oblíbence, Richarda Feynmana, který prohlásil „If I could explain it to the average person, I wouldn't have been worth the Nobel Prize.“ Pravda, já nejsem žádný Feynman, na druhou stranu, já se nesnažím vysvětlit nikomu žádnou kvantovou elektrodynamiku.
Tak tedy co se konečně skrývá za tou prapodivnou transformací, co je pojmenována po nějakém chlapíkovi.

Fourierovou transformací integrovatelné funkce (v Lebesgueově smyslu) $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ rozumíme $\hat{f}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi it\nu}dt$, kde ν reprezentuje frekvenci a t čas.

Tak a teď co to zajímá. Zjevně vezmu nějakou funkci frekvence, tedy reprezentovanou v prostoru frekvencí (vykašleme se na chvíli na to, že je to spojité a ten integrál je nekonečný, mi je jasné, že cokoliv dělám, to nedělám v nekonečném čase a nějaké vyčítání pixelů na CCD čipu je spíš diskrétní) a převedu ji do časového prostoru. Takže jsme nějakou funkci, která reprezentovala frekvence transformovali v takovou, co reprezentuje čas, čili časovou závislost.
A ty funkce, které transformujeme vlastně můžou být docela ošklivé, neboť jsme jim dovolili nespojitost nejvýše na množině Lebesgueovské míry nula, takže to klidně můžou být funkce hranaté, s nespojitými derivacemi a čert ví čím ještě, ale tyhle funkce nechejme matematikům, ať si hrajou. Takže bych mohla přestat ujíždět na tom, co je Fourierova transformace z matematického hlediska a mohla bych se začít věnovat něčemu, co bych nazvala praktickou aplikací. Shrnuto a podtrženo, tím, že jsem dovolila tyhle ošklivé funkce jsem vlastně zobecnila Fourierovu řadu i na věci ošklivě neperiodické. A teď se posuneme konečně dál.

Takže měla bych se asi zaměřit na to, k čemu mi fourierova transformace bude v mé bakalářské práci. Takže zabývám se vyráběním obrázků a mým cílem jsou pěkné, ostré a detailní obrázky. Je to podivuhodné, ale „nějaký takový integrál“ mi může docela hodně pomoci. Pomocí fourierovy transformace můžu totiž detekovat hrany v obrázcích, zbavovat se šumu a vůbec zvýrazňovat detaily. No jak už jsem kdesi znínila, musím zohlednit hlavně to, že nějaké vyčítané fotony jsou docela diskrétní a navíc musím zůžit interval, přes který integruju, nekonečná měření vážně nemám. Navíc to celé beru v úvahu pro 2D, neboť mám obrázek a ne nějakou obyčejnou funkci. No to, jak oříznout vysoké frekvence a zbavit se tak šumu, nebo detekovat hranu jako náhlou změnu ve frekvenčním spektru ... to je sice zajímavé, ale vstříc tomu jsem se zastavila nad něčím úplně jiným. Tím je Parsevalův teorém, který je pěkně aplikovatelný právě na zpracování obrázků. Tedy já si myslím, že by mi k něčemu mohl být. Můžu se mýlit, ale možná také ne, což by mi udělalo nesmírnou radost. Bohužel upustím od striktně matematického zápisu a použiju takový víc technický. Snad jen stojí za zmínku, že musím použít riemannovsky integrabilní funkce ...

Celková energie uchovaná ve formě vlny $x(t)$ sečtená přes celý časový interval je rovna celkové energii takové vlny sečtené přes všechny frekvence. Tedy můžeme psát $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$, kde $X(\nu) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.To platí pro spojitou funkci, pro diskrétní případ docela jednoduše integraci zaměníme za sumaci.

No co nám Parsevalův teorém říká? Že fourierova transformace zachovává energii v obou směrech. Což je vcelku důležitý poznatek, vezmeme-li v úvahu linearitu fourierovy transformace (kterou celou dobu mlčky předpokládám). Pak nám totiž vyplyne, že ať uděláme s obrázkem cokoliv, energii to zachová. Když bychom si tu energii vyplotili, tak to dokonce můžeme nazvat modulem transformace, ale název je vedlejší. Důležité je, že po jakémkoliv škálování a podobných věcech ta energie zůstane. Takže z Parsevalova teorému pro nás vyplyne, že pokud změníme dvoudimenzionální Fourierovu transformaci, můžeme změnit obrázek. Navíc, energie, kterou jsme zaznamenali v nějaké části spektra je určitě energie, která se někde v obrázku vyskytuje. A z vlastností linearity víme, že si s jednotlivými komponentami můžeme hrát docela samostatně, nezávisle na sobě. Nutně mi to pak implikuje následující úvahu. Pokud mám „rozplizlé“ hvězdy na obrázku, nemůžu se rozplizlosti zbavit tak, že z kolečka udělám pouze o to jasnější bod?

Obrázek 1: Modelový obrázek s ošklivými hvězdami

Napadlo mě, jestli by Parsevalův teorém nemohl vyřešit problém hvězdy vpravo dole. Řekněme, že jí reprezentuje nějaká část energetického spektra, pak tedy můžu tuto část libovolně oseknout a smrsknout do jednoho bodu . . . Pokud můžu s jednotlivými komponenty dík linearitě zacházet libovolně, mohla bych zachovanou energii do jednoho bodu dostat. Ale to je zatím jen hypotéza, rozhodně si nejsem jistá, zda to tak funguje a bohužel jsem neměla čas na experimentování. Hm ale ostatně, když transformuju kolečko, dostanu něco nápadně podobného difrakčnímu obrazci a to má k přírodě blíž než přeteklé fotony na CCD.

A to by tak možná bylo vše. Teda rozhodně by to vše nebylo, neboť po každé napsané větě se mi vybavily další a další informace, které by stálo za to zmínit, neboť takhle je veškerá práce dost neuskupená a její informační hodnota dost možná konverguje k nule. Ale učebnice o Fourierově transformaci už napsali jiní a povolanější, tedy nechť je toto jen krátké memento mých ne zcela ucelených znalostí o dané problematice, které by jistě zasloužily matematické i technické prohloubení. A na závěr bych chtěla jen zmínit, že jsem si vědoma existence konvoluce, rychlé Fourierovy transformace (FFT) či waveletů, ale mám pocit, že abych o tomhle napsala s alespoň trochu čistým svědomím, musela bych popsat mnohem více listů papíru (ať už virtuálního nebo reálného).