SYSTÉMY MNOHA ČÁSTIC

- popis klasických systémů, fenomenologický a statistický popis; - Brownův pohyb, plynných částic, nerozlišitelnost a její důsledky, - jednočásticová aproximace

Klasické systémy

S.H.J. - mezi částicemi ($\vec{F}_{int}$) + síly vnější a vnější $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}$

Můžeme celou soustavu nahradit těžištěm (a celkovou hmotností)

Těžiště se pohybuje, jako kdyby v něm byla soustředěna veškerá hmota; podle

$x_T = \frac{1}{m}\sum_i^n m_i x_i$ $\vec{r}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i$

Pro tuhé těleso pak $x_T = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{m}\int_V x\rho(\vec{x})\,dV$

1. impulsová věta $m\vec{a}_T = \sum \vec{F}_{ext}$

Z Newtonova 3. zák. - vnitřní síly v tělese se navzájem vyruší $\sum \vec{F}_{int} = 0$

Hybnost soustavy - součin celk. hmotnosti a rychlosti těžiště $\vec{p} = m\vec{v}_T$

$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$ V izolované soustavě bez vnějších sil je hybnost zachována

Impuls síly - změna hybnosti $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\,dt$

$\vec{p}_f - \vec{p}_i$

Úhlové veličiny

$\theta = \frac{s}{r}$ $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ zrychlení $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$

nejsou vekt. veličinou! (protože skládání otáčení není komutativní)

Zrychlení na kruž. $a_t = \varepsilon\cdot r$ normálové $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ [rad s^-1]

Moment setrvačnosti $I = \sum m_i r_i^2$ $I = \int r^2\,dm = \int_V r^2\rho\,dV$

Závisí na tvaru tělesa, rozdel. hmoty od osy otáčení, orientaci tělesa k ose otáčení

Moment síly $\vec{M} = r\cdot F\cdot\sin\alpha = \vec{r}\times\vec{F}$

2. impulsová věta $I\varepsilon = \sum M$ $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i}$

Moment hybnosti $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$; $L = I\omega$ - pevné těleso

→ fenomenologický přístup (tzv. termodynamika)

Statistický přístup - nedíváme se na jednotl. částice, ale na pravděpodobnosti. Na druhou stranu vše je nekonečno jako fenomén.

Spojení makroskopický a mikroskopický přístup

$N_A = 6.02\cdot10^{23}\ mol^{-1}$ Avogadrova konst.

Tlak vyvolaný n moly plynu $p = \frac{n M_m v_{ef}^2}{3V}$ $v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}$ $v_{ef} = \sqrt{\frac{3RT}{M_m}}$

$E_k = \frac{3}{2}kT$ - stupně volnosti 3 (ekvipartiční teorém) $k = 1.38\cdot10^{-23}\ J\,K^{-1}$

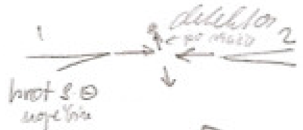
Maxwellovo rozdělení - počet molekul v $(v, v+dv)$

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M_m}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{M_m v^2}{2RT}\right)$$

nejpravděp.: $\bar{v}$; $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M_m}}$ $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}$

Kvantové systémy stejných částic - princip nerozlišitelnosti
V kvantovém měřítku popsat pouze pravděpodobnost výskytu částice → to nemá klasické trajektorie

Pravděpodobnosti výskytu 2 částic se mohou překrývat → nerozlišitelnost

Srazíme 2 elektrony 

na hrotech stejné napětí - zrychlí elektrony

klasický případ 

V kvantové superpozici obou možností

$A(1,2\to a,b) = A(1\to a, 2\to b) + A(2\to a, 1\to b)$ (1)

2 druhy částic < fermiony ⊖ Fermi-Diracova statistika
bosony pro než (1) ⊕ Bose-Einsteinova statistika

Pro fermiony: a, b blízko → celková $A \approx 0$. Elektrony se vyhýbají jeden druhému - antibunching

bosony $A \approx 2$ - bunching

Soubor částic $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots)$ .. zaměníme 2 částice

$$\psi(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n) = e^{i\varphi}(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) \text{ liší se fází}$$

$$\psi(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) = e^{i\varphi}\psi(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n) = e^{2i\varphi}\psi(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n)$$

- $e^{2i\varphi} = +1$ ... stále stejný stav: bosony ($e^{i\varphi} = 1$) celočíselný spin
- $e^{i\varphi} = -1$ ... fermiony (poločíselný spin)

bosony mají symetrickou fci, fermiony antisymetrickou

Fermiony k-fermionů ve stavech $\psi_1(x) \dots \psi_k(x)$

$$\psi(x_1 \dots x_k) = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \dots & \psi_k(x_1) \\ \psi_k(x_1) & & \psi_k(x_k) \end{vmatrix} \text{ Slaterův det}$$

det - mění znaménko po prohození řádek

Platí Pauliho vylučovací princip! Fermiho hl. - až po ni jsou pro $T\to 0$ zaplněny stavy

Př. 2 elektrony < spinová část antisym
prostorová část antisym

$\to \psi_1 = |+\rangle|+\rangle \vee \psi_2 = |-\rangle|-\rangle \vee |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$ spinové stavy (sym) triplet, celk. spin 1

$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$ antisym - singlet celk. spin 0

Bosony - kondenzace $T\to 0$ - všechno se usadí na nejnižším stavu → makroskopický projev kvant. chování!

např. fotony - čím více na hladině - tím větší pravděpodobnost, že se přidá další (stimulovaná emise v laseru)

Jednočásticová aproximace

Ideální plyn - neinteragující částice

Def $Z = \sum_{stavy} e^{-\frac{E_i}{T}} = e^{-\frac{F}{T}}$; $Z = \sum_{stavy} \exp(-(E_i - \mu N_i))/T = e^{-\frac{\Omega}{T}}$

$\psi(x_1, x_2 \dots) = \psi(x_1)\psi(x_2)\dots$ 1 [illegible] fce

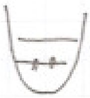
Bozony x Fermiony   symetrické x antisymetrické

[illegible] $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

obsazeny n_i

celý stav $E_\pi = n_0\varepsilon_0 + n_1\varepsilon_1 + \dots$ ε_i en. jednočásticového stavu

$N_\pi = n_1 + n_2 + n_3$

 $\psi(x_1 x_2) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$  $\psi(x_1, x_2) \propto \psi_0(x_1)\psi_1(x_2) \pm \psi_0(x_2)\psi_1(x_1)$

Sečteme všechny možnosti  ... ale superpozice není dovolená

Grand kanonický ansámbl $\sum_\pi = \sum_{n_0=0}^{max}\sum_{n_1=0}^{max}\dots$ bez opakujících se stavů

$$\sum_\pi \exp(-(E_\pi - \mu N_\pi)/T) = \sum_{n_0}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\dots \left(e^{-(\varepsilon_0 n_0 + \varepsilon_1 n_1 + \dots - \mu(n_0 + n_1 + \dots))/T}\right)$$

$$= \sum_{n_0}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\dots e^{-\left(\frac{(\varepsilon_0-\mu)n_0}{T}\right)} e^{-\left(\frac{(\varepsilon_1-\mu)n_1}{T}\right)}$$

$$= \sum_{n_0=0} e^{-\left(\frac{(\varepsilon_0-\mu)}{T}n_0\right)} \cdot \sum_{n_1=0}^{\{1;\infty\}} e^{-\frac{(\varepsilon_1-\mu)}{T}n_1} \cdot \dots$$

$\{1; \infty\}$ < 1 .. fermiony; ∞ .. bozony

Bozony $\sum_{n_0}^{\infty}\left(e^{-\frac{(\varepsilon_0-\mu)}{T}}\right)^{n_0} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{(\varepsilon_0-\mu)}{T}}}$ $Z_B = \prod_{i=0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{(\varepsilon_i-\mu)}{T}}}$

Fermiony $\sum_{n_0=0}^{1} e^{-\frac{(\varepsilon_0-\mu)}{T}n_0} = 1 + e^{-\frac{(\varepsilon_0-\mu)}{T}}$ $Z_F = \prod_{i=0}\left(1 + e^{-\frac{(\varepsilon_i-\mu)}{T}}\right)$

$$e^{-\frac{\Omega}{T}} = Z \rightarrow \Omega = -T\ln Z \rightarrow \Omega_B = -T\ln\sum_{i=0}^{\infty}\ln\frac{1}{1 - e^{-\frac{(\varepsilon_i-\mu)}{T}}} = T\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(1 - e^{-\frac{(\varepsilon_i-\mu)}{T}}\right)$$

$$\Omega_F = -T\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(1 + e^{-\frac{(\varepsilon_i-\mu)}{T}}\right)$$

$\rightarrow \Omega_{B/F} = \pm T\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(1 \mp e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right)$ Landauův potenciál - suma přes jednočást. stavy