PERIODICKÉ DĚJE

• kmity (příklady z mech. a elektřiny), • harmonické a anharmonické, • malé kmity fyz. systémů, harm. aproximace, • periodické děje, střední hodn., • příklady z mech. a elmag. vlnění

kmity poblíž bodu rovnováhy + mnoho fyzikálních systémů můžeme aproximovat harm. oscilátorem (vyjde z Taylora)

$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\frac{dU(x_0)}{dx}(x-x_0)}_{0 \text{ v minimu}} + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x-x_0)^2 \ldots$$

$U = \frac{1}{2}kx^2$ - parabola

řešení $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

$F = -\frac{dU}{dx} = -k\cdot x \wedge F = m\cdot\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$ def $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Ew. $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

Příklad z mechaniky: pružina $U = \frac{1}{2}kx^2$ $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ $L = T - U$

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$ $\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$ - rce pro pružinu

Příklad z elmag. LC obvod: $E_{kond} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ $E_L = \frac{1}{2}LI^2$ $U_c = \frac{Q}{C}$ $I = \frac{dQ}{dt}$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

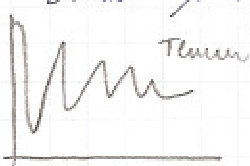
$E = E_C + E_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \text{konst} = 0 = \frac{Q}{C}\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{I} + LI\underbrace{\frac{d^2Q}{dt^2}}_{=\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right)} \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$

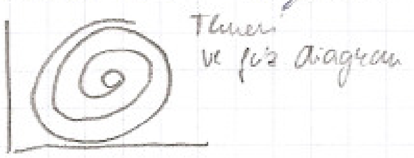
→ řešení je harm. kmity

RLC obvod R klesne → disipace ... je $P = -I^2R = \frac{dE}{dt}$

$$\frac{Q}{C}\cancel{\frac{dQ}{dt}} + L\cancel{I}\frac{d^2Q}{dt^2} = -\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 R \Rightarrow L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0$$

Na rezistoru - napětí a proud ve fázi (proto U_R platí stejně jako I)
kondenzátoru - proud předbíhá napětí o 90°, U je zpožděné za I
cívka - proud zpožděn o 90° U_L předbíhá o 90°

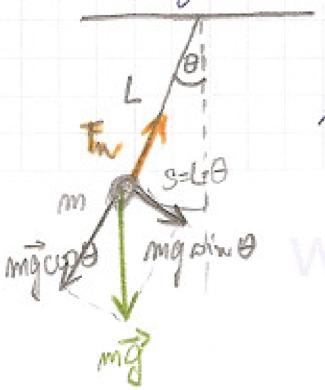




Harmonické kmity - lineární systémy (síla úměrná výchylce, proud napětí)
jen jedna frekvence a amplituda na ní nezávisí

Anharmonické kmity - vztah mezi silou a výchylkou není lineární, závisí na amplitudě, objeví se další frekvence
→ mat. kyvadlo bez aprox. $F = -\sin\theta\cdot m\cdot g$

Malé kmity fyz. systémů, harmonická aproximace
Malé kmity - odchylkou se zanedbají nelinearity
Mat. kyvadlo



$F = -mg\sin\theta$ ← nelineární $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\ldots$ ← zanedbáme

$F \approx -mg\theta \rightarrow l\ddot{\theta} \approx \cancel{m}g\theta$ $\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0$

Řešení $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

+ třeba zadat okrajové podmínky

[illegible] + šíření vln

Perioda – čas potřebný k provedení jednoho úplného kmitu – cyklu pohybu

$T = \frac{1}{f}$ pro harm. oscilátor $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$T = 2\pi\omega$

Matem. kyvadlo $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — podíl setrvačného členu a vratného

Fyzické $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ — vratný člen → ochota tendence návratu

Torzní $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$ — do rovn. polohy

f 1 Hz – 1 kmit za sekundu

Vlny – např. na hladině; elmag; zvuk

– příčné – směr vibrace kolmý na směr šíření vlny (struna, elmag, vlny v pevné látce)

– podélné – oscilace paralelní se směrem šíření vlny (zvuk)

+ kombinace obojího (seismické)

Obecná pohybová vlnová rce $\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla^2\phi}$

Obecné řešení $\boxed{\phi = F(x-ct) + G(x-ct)}$

platí princip superpozice

vlnoplocha – má konst. fázi (fáz. rychlost – rychlost pohybu vlnoplochy)

úhlová f – změna fáze s časem

vlnový vektor – změna fáze v prostoru

každý bod vlnoplochy je zdrojem vlnění

Rovinná vlna $\phi(\vec{r},t) = A e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$ kulová $\phi(\vec{r},t) = \frac{A}{|\vec{r}|} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$

Obecná vlna – superpozice harm. vln (Fourierova řada)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega t} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$k = \frac{\omega}{c}$; interference $x = e^{i\omega_1(\frac{x}{c}-t)} + e^{i\omega_2(\frac{x_2}{c}-t)}$ $t^* = \frac{x}{c} - t$

konstruktivní $\Delta x = m\lambda$
destruktivní $\Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$

$$\to x = e^{\frac{1}{2}i(\omega_1+\omega_2)t^*}\left[\frac{1}{2}e^{i(\omega_1-\omega_2)t^*} + \frac{1}{2}e^{i(\omega_2-\omega_1)t^*}\right]$$

rychlost fáze $v_F = \frac{\omega}{k}$

jsou-li skládané vlny podobné f a k $\to v_F = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} \approx \frac{2\omega}{2k} = \frac{\omega}{k}$

rychlost obálky $\to v_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} \approx \frac{d\omega}{dk}$

Významný případ – dvě vlnění postupují prostředím $x_{m_1} = x_{m_2}$, $X_1 = X_2$, $f_1 = f_2$ + opačný směr. ⇒ stojaté vlnění

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \to 2y_m \sin\omega t \cos kt$$

$$y = y_m \sin(\omega t \pm k\omega)$$

kmitny $x = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$ uzly $= \frac{n\lambda}{2}$

nepřenáší en. (jen se mění E_p a E_k), kmitá se stejnou fází mezi 2 uzly ale s různou amplitudou

Příklady vln. dějů (elmag + mech)

Zvuk - mechanická vlna šířící se pevným (kapalným) plynným prostředím. Je vlna podélná (v pev. látkách i příčná)
Rychlost šíření závisí na vlastnostech prostředí (E_k celk., E_p)
Porovnáme s [illegible]
$\Rightarrow$ modul objem. pružnosti $K = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$ Δp opačné znaménko než ΔV

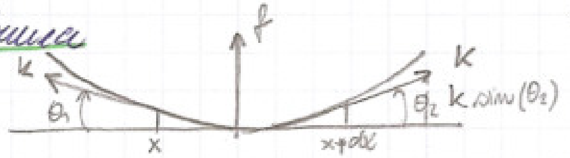
infrazvuk $f = 20\,Hz$ ultrazvuk $f = 20\,kHz$

$\Delta p = \Delta p_m \sin(kx - \omega t)$ amplituda $\Delta p_m = (v \rho \omega) s_m$ ampl. výchylky

Dopplerův jev. $f' = f \frac{v \pm v_D}{v \mp v_Z}$ v_D rychlost detektoru, v_Z zdroje

překročí v_Z rychlost zvuku v prostředí $\rightarrow$ doppler neplatí $\Rightarrow$ ráz. vlna
$\sin\theta = \frac{v}{v_Z}$ (Machův úhel) 2θ

Struna



k - napětí na struně
síla na dif. element dx, $x + \frac{1}{2}dx$ v půlce

$$f(x + \tfrac{1}{2}dx) = k \sin\theta_1 + k \sin\theta_2 \sim k[\tan\theta_1 + \tan\theta_2] = k\left[-\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x+dx,t)}{\partial x}\right]$$

$$k\left[-\cancel{\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx\right] = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$ hmotnost dif. úseku $m = \varepsilon\, dx$

$$f = m \ddot{y} = \varepsilon\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rightarrow k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y = y_0\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Elmag. vlnění - světlo

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$-\nabla^2\phi - \mathrm{div}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow -\nabla^2\phi - \frac{\partial\, \mathrm{div}\vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$-\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\nabla^2\phi + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

postupné vlny $E = E_m \sin(kx - \omega t)$, $B = B_m \sin(kx - \omega t)$.   Tok en. $S = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$
[illegible]

Difrakce dopadající vlny na hranu (překážku/otvor; rozsah závisí na šířce a délce vlny) & interference
na štěrbině od centrální osy $a \sin\theta = m\lambda \rightarrow$ minima
na mřížce $d \sin\theta = m\lambda$ maxima

RTG difrakce $2d \sin\theta = m\lambda$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E}}_{0} - \Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\cancel{\mu_0 \vec{j}} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) =$$
$$= -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$