Náhradní příklady za neúčast z F1711

V případě neúčasti na cvičení je nutné vypočítat náhradní příklady. Odevzdávejte mi je prosím do 14 dnů od konání příslušného cvičení. Úlohy lze odevzdávat osobně nebo elektronicky mailem. Pište prosím čitelně.

1. cvičení

1. Nechť jsou $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pak, pokud je definováno, vypočítejte:

   (a) $(4B)C + 2B$
   (b) $2A^T + C$
   (c) $D^T - E^T$
   (d) $(D - E)^T$
   (e) $D^T E^T - (ED)^T$
   (f) $(AB)C$
   (g) $A(BC)$
   (h) $\mathrm{Tr}(D)$
   (i) $\mathrm{Tr}(D - 3E)$
   (j) $7\mathrm{Tr}(4B)$
   (k) $\mathrm{Tr}(A)$
   (l) $\mathrm{Tr}(DD^T)$
   (m) $C^T A^T + 2E^T$

2. Najděte matici $A = (a_{i\,j})$ typu 4×4 splňující:

   (a) $a_{i\,j} = i + j$
   (b) $a_{i\,j} = \begin{cases} 1 & |i - j| \le 1 \\ -1 & |i - j| > 1 \end{cases}$

2. cvičení

1. Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

   (a)

$$\begin{aligned} 1 &= 2x_1 + 3x_2 - x_4 \\ 0 &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ 2 &= x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
1 &= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\
10 &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
-9 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
-1 &= 3x_1 - 2x_2 \\
3 &= 4x_1 + 5x_2 \\
2 &= 7x_1 + 3x_2
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
a &= x_1 + x_2 + x_3 \\
b &= 2x_1 + 2x_3 \\
c &= 3x_2 + 3x_3
\end{aligned}
$$

2. Řešte soustavy závislé na parametrech a proveďte diskuzi o počtu řešení

(a)

$$
\begin{aligned}
1 &= ax_1 + x_2 - 2x_3 \\
0 &= x_1 - x_2 + x_3 \\
b &= (1+a)x_2 - x_3
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
b &= x_1 - ax_2 - 2x_3 \\
b-3 &= x_1 - (1-a)x_2 \\
2b-1 &= x_1 + (1-a)x_2 + ax_3
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
1 &= ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
1 &= x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 \\
1 &= x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 \\
1 &= x_1 + x_2 + x_3 + ax_4
\end{aligned}
$$

3. cvičení

1. Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny dané:
   (a) třemi body $A = (-1, 1, 0)$, $B = (2, 1, 6)$, $C = (3, 0, 4)$
   (b) dvěma body $A = (1, 2, -3)$, $B = (0, 2, 1)$ a směrovým vektorem $u = (2, 1, -1)$
   (c) bodem $A = (3, 1, -2)$ a směrovými vektory $u = (-1, 2, 1)$, $v = (3, -4, 2)$
2. Určete příčku p mimoběžek:
   (a) $t : (1, 2, -1) + r(1, -1, 1), q : (0, 9, -2) + s(1, 0, 0)$ a p je rovnoběžná s vektorem $(1, 2, 0)$
   (b) $t : (3, 3, 3) + r(2, 2, 1), q : (0, 5, -1) + s(1, 1, 1)$ a p prochází bodem $A = (4, 5, 3)$
3. Nechť jsou $a = -6 + 2i$ a $b = 3 + 5i$, pak určete:
   (a) $(a - b)^3$
   (b) $\overline{ab}$
   (c) $\frac{a}{b}$
4. Upravte:
   (a) $\frac{3-2i}{1-i}$
   (b) $\frac{1+i}{3-4i}$
   (c) $\frac{(1+2i)(2+i)(3-2i)}{(1-i)^2}$
5. Převeďte na goniometrický tvar:
   (a) $-1 + \sqrt{3}i$
   (b) $-\sqrt{2}(1 - i)$
6. Najděte řešení rovnice $z^5 = 1$.

4. cvičení

1. Určete kořeny polynomů:
   (a) $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 = 0$
   (b) $x^5 - 8x^3 - x^2 + 12x - 4 = 0$
2. Najděte inverzní matici A^{-1}:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

(d) $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Spočtěte determinant matic:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x & y \\ y & 0 & \ddots & 0 & x \end{pmatrix}$

5. cvičení a 6. cvičení

1. Rozhodněte, zda se jedná o lineárně (ne)závislé vektory:

   (a) $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,1,1,1)$, $u_3 = (1,1,1,1)$, $u4 = (1,1,1,1)$

   (b) $u_1 = (1,0,2,3)$, $u2 = (1,3,0,0)$, $u3 = (2,0,1,1)$, $u_4 = (1,6,1,4)$

2. Z následujících vektorů vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů:

   (a) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,5,4)$, $v_3 = (3,6,1)$, $v_4 = (1,1,0)$, $v_5 = (1,1,5)$

3. Doplňte vektor do množiny $M = \{(1,2,0,0),(2,1,1,3),(0,1,0,1)\}$ tak, aby pak tvořila bázi R^4.

4. Určete souřadnice vektorů v v bázi α:

   (a) $v = (2,1,1), \alpha = \{(2,7,3),(3,9,4),(1,5,3)\}$,

   (b) $v = (1,1,1,1), \alpha = \{(0,0,0,5),(1,2,3,1),(1,0,1,0),(0,1,1,0)\}$

5. Souřadnice vektoru jsou $v_\alpha = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ pro $\alpha = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, určete souřadnice vektoru v bázi $\beta = \{u_1+u_4, u_2+u_3, u_3, u_4\}$.

6. Lineární zobrazení f zobrazuje $f(u_i) = v_i$. Najděte matici tohoto zobrazení ve standartních bázích.

   $$u_1 = (-2, 3, -5),\ u_2 = (0, 1, 3),\ u_3 = (2, 0, 0),\ v_1 = (-1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, -1),\ v_3 = (-2, 1, 2)$$

7. Souřadnice vektoru jsou $v_\alpha = (1, -3, 2)$ pro $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$, určete souřadnice vektoru v bázi:

   (a) $\beta = \{3u_1 + 2u_2 + u_3, u_2 - 2u_3, u_1 - u_3\}$

   (b) $\beta = \{u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3, u_3\}$

8. Lineární zobrazení f je dáno maticí

   $$f_{\beta\,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   kde $\alpha = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ a $\beta = \{(-1, 2), (1, 1)\}$. Najděte, jak vypadá matice f pro standartní báze.

9. Nechť je $\alpha = \{u_1, u_2\}$ báze v R^2.Použijte Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro získání ortogonální báze.

7. cvičení

1. Nakreslete graf funkce:

   (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$
   (b) $\ln|x|$
   (c) $|\ln x|$
   (d) $2 \arcsin \frac{x}{3}$
   (e) $3\,\mathrm{arccot} x$
   (f) $\arctan(x + 1)$
   (g) $\frac{1}{1-x}$
   (h) $\ln(x - 1)$

2. Určete zda se jedná o lichou, sudou funkci nebo to není ani jeden z uvedených případů:

   (a) $\ln \frac{2-x}{2+x}$
   (b) $\frac{a^x+1}{a^x-1}$
   (c) $\ln \frac{\sin x}{x}$

8. cvičení

1. Vypočítejte:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+\cdots+a_n}{a_0x^n}$

(b) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

(c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^5-x^4}{\sqrt{x^4+1}-1}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$

(f) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1-\tan(x)}}{\sin(x)}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$

(l) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

9. cvičení

1. Určete derivaci následujících funkcí:

(a) $x\sqrt{1+x^2}$

(b) $\frac{(x^2+1)\arctan x}{\ln x}$

(c) $\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + x \sin x}$

(d) $\sin(\sin(\sin x))$

(e) $x^{(x^x)}$

(f) $(x^x)^x$

2. Vypočítejte limity:

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\ln x$

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(e) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$

10. cvičení

1. Určete průběh následujících funkcí:

(a) $\frac{\ln x^2}{x}$

(b) $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

(c) $\sqrt[3]{1-x^3}$

(d) $\frac{x^5}{x^4-1}$

11. cvičení

1. Integrujte:

(a) $\int \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{3-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\mathrm{d}x$

(e) $\int \left(\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} + \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\mathrm{d}x$

(f) $\int x\arcsin(x)\mathrm{d}x$

(g) $\int \sqrt{(1-x^2)}\mathrm{d}x$

(h) $\int \arctan(x)\mathrm{d}x$

(i) $\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x$

(j) $\int e^x\sin^2(x)\mathrm{d}x$

(k) $\int 2e^{2\sin(x)}\cos(x)\mathrm{d}x$

(l) $\int \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+4}}\mathrm{d}x$

(m) $\int \frac{x^3}{(x-2)^{100}}\mathrm{d}x$

(n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-2x-x^2}}$

(o) $\int \frac{3\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x$

(p) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\mathrm{d}x$

(q) $\int \frac{2}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$

(r) $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

12. cvičení

1. Přibližně vypočítejte:

   (a) $\cos(61°)$ (b) $e^{1,2}$ (c) $\sin(32°)$

2. Určete Taylorův polynom pro $x_0 = 0$:

   (a) e^x (b) $\sin(x)$ (c) $\cos(x)$

3. Ukažte, že se relativistický výraz pro kinetickou energii bodové částice pro malé rychlosti vede na klasický výraz.

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \to \frac{1}{2} m v^2$$

13. cvičení

1. Integrujte: $\int \frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2} \mathrm{d}x$
2. Určete objem a povrch následujících útvarů:

   (a) kuželu (b) válce (c) koule

3. Vypočtěte délku:

   (a) kružnice

   (b) šroubovice: $x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = bt$

4. Vypočtěte moment setrvačnosti kuželu vzhledem k ose symetrie.

14. cvičení

1. Dokažte následující platnost vztahů:

(a) $\sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i}\right) = 2^n$ (b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (c) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

2. Princ si z deseti dívek, z nichž osm je princezen a dvě jsou čarodějnice, má vybrat nevěstu. Konzultuje se svým dvorním šaškem, který rozezná princeznu s prevděpodobností $\frac{5}{6}$.

   (a) Šašek soudí, že dívka D je princezna. Určete pravděpodobnost, že je to skutečně princezna.

   (b) Šašek soudí, že dívka D je čarodějnice. Princ tedy zvolí náhodně jinou dívku. Jaká je pravděpodobnost, že tato zvolená dívka bude princezna?

3. Test má 100 otázek, na každou z nich student může zvolit odpovědi A, B, C, D, z nichž je právě jedna správná. Student zná správné odpovědi na k otázek. Na další otázky volí odpověd náhodně. Vyberme náhodně otázku z takového testu.

   (a) S jakou pravděpodobností u ní nalezneme spravnou odpověď?

   (b) Předpokjládejme, že odpověd je správná. Jaká je pravděpodobnost, že student jenom hádal?

4. Levoručka vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10% jsou zmetky. Výrobce Nešika vyrobí denně 40 výrobků, z toho jsou 5% zmetky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z denní produkce je zmetek a pochazí:

   (a) od Levoručky

   (b) od Nešiky