

Fyzikální praktikum 6 - Měření modulu pružnosti pevných látek

Petr Šafařík

6. dubna 2006

Obsah

1	Podmínky	3
2	Teorie	3
2.1	Měření modulu pružnosti pevných látek	3
2.2	Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou	3
3	Postup	4
3.1	Měření modulu pružnosti pevných látek	4
3.2	Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou	4
4	Měření Youngova modulu pružnosti pevných látek	4
4.1	Jednotlivá závaží	4
4.2	Rozměry nosníku	5
4.3	Zatěžování nosníku	5
4.4	Odlehčování nosníku	5
4.4.1	Poznámky	5
4.5	Prohnutí nosníků mezi dvěma závažími	6
4.6	Youngův modul pružnosti E	6
4.7	Výpočet chyb	6
4.7.1	Výpočet absolutní chyby	6
4.7.2	Výpočet relativní chyby	6
4.8	Závěr	7
5	Měření modulu pružnosti v torzi G	7
5.1	Rozměry kyvadla	7
5.2	Doba kmitu	7

<i>OBSAH</i>	2
5.3 Dílčí výpočty	7
5.4 Modul pružnosti v torzi	8
5.5 Výpočty jednotlivých chyb	8
5.5.1 Chyba průměru kyvadla	8
5.5.2 Chyba periody kyvadla	8
5.5.3 Chyba průměru závěsného drátu	8
5.5.4 Chyba délky závěsného drátu	8
5.5.5 Celková absolutní chyba	9
5.5.6 Celková relativní chyba	9
5.6 Závěr	9
6 Závěr	9

1 Podmínky

Teplota: 21, 36°C

Tlak: 73, 89mm

Vlhkost: 51%

2 Teorie

2.1 Měření modulu pružnosti pevných látek

Nosník s navlečeným třmenem položíme na břity stojanu. Třmen umístíme doprostřed do kontaktu s indikátorovým úchylkoměrem, Třmen postupně zatěžujeme a odečítáme velikost prohnutí nosníku v závislosti na působící síle.

Uvažujme nosník o délce l a tloušťce a .

Vztah mezi Youngovým modulem E , zatížením F a průhybem daného nosníku y je:

$$E = \frac{F \cdot l^3}{4 \cdot y \cdot a^3 \cdot b} \quad (1)$$

2.2 Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Na homogenní drát délky l o poloměru r je zavěšena homogenní koule o poloměru r o hmotnosti mnohem větší, než je hmotnost drátu. Moment setrvačnosti koule je:

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \quad (2)$$

Kouli úhlově natočíme kolem svislé osy. Po uvolnění koná koule torzní kmity, které jsou popsány diferenciální rovnicí:

$$\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \quad (3)$$

Kde b je součinitel útlumu a D direkční moment. Závislost direkčního momentu na geometrických parametrech drátu a modulu pružnosti v torzi G je dána vztahem:

$$G = \frac{G \cdot \pi \cdot r^4}{2 \cdot l} \quad (4)$$

Zanedbáme-li součinitel útlumu b , dostáváme pro periodu torzních kmitů koule vztah:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (5)$$

Po úpravě tedy obdržíme:

$$G = \frac{8 \cdot \pi \cdot l \cdot J}{T^2 \cdot r^4} \quad (6)$$

3 Postup

3.1 Měření modulu pružnosti pevných látek

- Změříme rozměry nosníků
- Přidáváme závaží a měříme velikost průhybu.
- Měření opakujeme i při oddělování závaží.
- Zjistíme Youngův modul pružnosti

3.2 Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

- Změříme rozměry torzního kyvadla.
- Vychýlíme kyvadlo a měříme délku periody
- Spočteme modul pružnosti v torzi

4 Měření Youngova modulu pružnosti pevných látek

4.1 Jednotlivá závaží

Číslo závaží	Hmotnost závaží
1	99,668 g
2	99,665 g
3	99,004 g
4	99,763 g
5	99,790 g
6	99,701 g
7	99,666 g
8	99,408 g
9	99,437 g
0	99,156 g

4.2 Rozměry nosníku

Výška nosníku	Šířka nosníku	délka nosníku
5,00 mm	28,30 mm	936 mm
5,15 mm	28,45 mm	937 mm
5,50 mm	28,60 mm	936 mm
5,15 mm	28,10 mm	936 mm
5,10 mm	28,50 mm	935 mm
$\bar{a} = 5,18mm$	$\bar{b} = 28,39mm$	$\bar{l} = 936mm$

4.3 Zatěžování nosníku

$\frac{F}{N}$	$\frac{y}{mm}$
976,74	2,99
1953,46	3,38
2923,70	3,87
3901,38	4,35
4879,32	4,84
5856,39	5,34
6833,11	5,80
7807,32	6,24
8781,80	6,80
9753,53	7,29

4.4 Odlehčování nosníku

$\frac{F}{N}$	$\frac{y}{mm}$
9753,53	7,29
8781,80	6,64
7807,32	6,29
6833,11	5,82
5856,39	5,27
4879,32	4,87
3901,38	4,43
2923,70	3,83
1953,46	3,37
976,74	2,98

4.4.1 Poznámky

- $F = m \cdot g = m_i \cdot 9,8$

4 MĚŘENÍ YOUNGOVA MODULU PRUŽNOSTI PEVNÝCH LÁTEK 6

- Přesnost úchylkoměru je $0,01mm$

4.5 Prohnutí nosníků mezi dvěma závažími

$\frac{y_1}{mm}$	$\frac{y_2}{mm}$
0,39	0,65
0,49	0,45
0,48	0,47
0,49	0,55
0,50	0,40
0,46	0,44
0,44	0,60
0,56	0,46
0,48	0,39

4.6 Youngův modul pružnosti E

$$E = \frac{F \cdot l^3}{4 \cdot y \cdot a^3 \cdot b} \Rightarrow$$

$$F = \frac{4 \cdot a^3 \cdot b \cdot E}{l^3} \cdot y \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{4 \cdot a^3 \cdot b \cdot E}{l^3} \rightarrow$$

$$\tan \alpha = 4,25286 \pm 0,01412 \Rightarrow$$

$$E = \frac{\tan \alpha \cdot l^3}{4 \cdot a^3 \cdot b} \quad (7)$$

Dosazení a výsledek:

$$E = \frac{\tan \alpha \cdot l^3}{4 \cdot a^3 \cdot b} = E = \frac{4,25286 \cdot 0,936^3}{4 \cdot 0,00518^3 \cdot 0,02839} = 220949981 Pa = 220,9 GPa$$

4.7 Výpočet chyb

4.7.1 Výpočet absolutní chyby

$$\delta E = \sqrt{\frac{\sum \Delta i_T^2}{n \cdot (n - 1)}} = 0,1386 GPa \quad (8)$$

4.7.2 Výpočet relativní chyby

$$\delta_r E = \frac{\delta E}{E} \cdot 100\% = 6,27\% \quad (9)$$

4.8 Závěr

Youngův modul pružnosti jsem určil na $E = (220,9 \pm 0,1386) \text{ GPa}$ s relativní chybou 6,27%

5 Měření modulu pružnosti v torzi G

5.1 Rozměry kyvadla

Průměr kyvadla	Délka závěsného drátu	Průměr závěsného drátu
99,2 mm	29,4 mm	1,01 mm
99,3 mm	28,8 mm	0,98 mm
99,7 mm	29,3 mm	0,98 mm
100,1 mm	29,6 mm	1,00 mm
100,0 mm	29,7 mm	1,01 mm
$\bar{D} = 99,66 \text{ mm}$	$\bar{l} = 29,40 \text{ mm}$	$\bar{d} = 0,996 \text{ mm}$
$\bar{R} = 49,83 \text{ mm}$		$\bar{r} = 0,498 \text{ mm}$

5.2 Doba kmitu

	$\frac{T}{10s}$	$\frac{T}{s}$
1	13,04	1,304
2	11,85	1,185
3	12,02	1,202
4	11,89	1,189
5	12,16	1,216
6	11,89	1,189
7	12,00	1,200
8	12,15	1,215
9	12,27	1,227
10	12,22	1,222

$$\bar{T} = 1,2149 \text{ s}$$

5.3 Dílčí výpočty

Hodnota m uvedená na kouli je $m = 5905 \text{ g} = 5,9 \text{ kg}$

Moment hybnosti koule je $J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 = \frac{J}{\text{kg}}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$$

$$D = \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2 \cdot l}$$

5.4 Modul pružnosti v torzi

$$G = \frac{32}{15} \cdot \pi^2 \cdot \rho \frac{l \cdot D^5}{d^4 \cdot T^2} \quad (10)$$

$$G = \frac{32}{15} \cdot \pi^2 \cdot \rho \frac{l \cdot D^5}{d^4 \cdot T^2} = 143063178,9 Pa = 143,1 GPa$$

5.5 Výpočty jednotlivých chyb

5.5.1 Chyba průměru kyvadla

$$\delta D = \sqrt{\frac{\sum \Delta i_T^2}{n \cdot (n - 1)}} = 0,152 mm \quad (11)$$

$$\delta_r D = \frac{\delta D}{D} \cdot 100\% = 0,15\% \quad (12)$$

5.5.2 Chyba periody kyvadla

$$\delta T = \sqrt{\frac{\sum \Delta i_T^2}{n \cdot (n - 1)}} = 0,102 s \quad (13)$$

$$\delta_r T = \frac{\delta T}{T} \cdot 100\% = 8,3\% \quad (14)$$

5.5.3 Chyba průměru závěsného drátu

$$\delta d = \sqrt{\frac{\sum \Delta i_T^2}{n \cdot (n - 1)}} = 0,003123 mm \quad (15)$$

$$\delta_r d = \frac{\delta d}{d} \cdot 100\% = 0,3\% \quad (16)$$

5.5.4 Chyba délky závěsného drátu

$$\delta l = \sqrt{\frac{\sum \Delta i_T^2}{n \cdot (n - 1)}} = 0,095 mm \quad (17)$$

$$\delta_r l = \frac{\delta l}{l} \cdot 100\% = 0,32\% \quad (18)$$

5.5.5 Celková absolutní chyba

$$\delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial l}\right)^2 \cdot (\delta l)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial D}\right)^2 \cdot (\delta D)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial d}\right)^2 \cdot (\delta d)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2 \cdot (\delta T)^2} \quad (19)$$

$$\delta G = \frac{32\pi^2 \rho}{15} \sqrt{\left(\frac{D^5}{d^4 T^2}\right)^2 (\delta l)^2 + \left(\frac{5l D^4}{d^4 T^2}\right)^2 (\delta D)^2 + \left(\frac{-4l D^5}{d^5 T^2}\right)^2 (\delta d)^2 + \left(\frac{-2l d^5}{d^4 T^3}\right)^2 (\delta T)^2} \quad (20)$$

$$\delta G = 5,28 GPa \quad (21)$$

5.5.6 Celková relativní chyba

$$\delta_r G = \frac{\delta G}{G} \cdot 100\% = 3,69\% \quad (22)$$

5.6 Závěr

Modul pružnosti v torzi jsem určil na $G = (143,1 \pm 5,3)GPa$ s relativní chybou 3,69%

6 Závěr

Naměřil jsem Youngův modul pružnosti nosníku $E = (220,9 \pm 0,1386)GPa$ s relativní chybou 6,27%

A zjistil jsem, že modul pružnosti v torzi pro tozní kyvadlo je:

$G = (143,1 \pm 5,3)GPa$ s relativní chybou 3,69%.