F2422 - HW5 - 16. dubna 2006

Petr Šafařík

16. dubna 2006

Obsah

1 Zadání

Urcete tok vektorového pole $F = (xz; xy; yz)$ povrchem telesa $T = \{f(x; y; z) \| x^2 + y^2\ R2; x \geq 0; 0 \geq z \geq H\}$ orientovaným vnejší normálou.

2 Druh a tvar tělesa

Jedná se o těleso tvaru v ose rozřízlého válce výšky H a poloměru R.

3 Umístění souřadnicové soustavy

Soustava má počátek umístěn tak, že osa y leží v rovině podstavy a prochází počátkem kružnice R, která určuje spodní podstavu. Kolmo na ni je poté osa x, která leží taktéž v rovině spodní podstavy a prochází středem polokruhu podstavy. Osa z je poté původní osou válce, kolmá na osy x a y.

4 Určení jednotlivých ploch/toků

- Φ_1 ... tok plochou:
  $x = 0$
  $y = s$
  $z = t$
  $t \in (0, H)$
  $s \in (-R, R)$

- Φ_2 ... tok plochou:
  $x = R \cdot \cos\varphi$
  $y = R \cdot \sin\varphi$
  $z = z$
  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  $z \in (0, H)$

- Φ_3 ... tok plochou:
  $x = R \cdot \cos\varphi$
  $y = R \cdot \sin\varphi$
  $z = 0$
  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  $r \in (0, R)$

- Φ_4 ... tok plochou:
  $x = R \cdot \cos\varphi$
  $y = R \cdot \sin\varphi$
  $z = H$
  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  $r \in (0, R)$

5 Tok jedna

$x = 0$
$y = s$
$z = t$
$t \in (0, H)$
$s \in (-R, R)$

$$\Phi_1 = \int_S 0 \cdot t \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix} dsdt = 0$$

6 Tok dva

$x = R \cdot \cos\varphi$
$y = R \cdot \sin\varphi$
$z = z$
$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$z \in (0, H)$

$(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}) = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$
$(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial z}{\partial z}) = (0, 0, 1)$

$$\Phi_2 = \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\cos\varphi \begin{vmatrix} R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} d\varphi dz + \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin\varphi\cos\varphi \begin{vmatrix} 0 & -R\sin\varphi \\ 1 & 0 \end{vmatrix} d\varphi dz$$

$$\Phi_2 = \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} zR^2\cos^2\varphi d\varphi dz + \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi dz$$

$$\Phi_2 = R\frac{H^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi + R^3 \cdot H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$\Phi_2 = R^2\frac{\pi H^2}{4} + R^3 H\frac{2}{3}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4}\pi R^2 H^2 + \frac{2}{3} R^3 H$$

7 Tok tři

$x = R \cdot \cos\varphi$
$y = R \cdot \sin\varphi$
$z = 0$
$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$r \in (0, R)$

$(\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}) = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$
$(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}; \frac{\partial z}{\partial r}) = (\cos\varphi \sin\varphi, 0)$

$\Rightarrow \Phi_3 = 0$

8 Tok čtyři

$x = R \cdot \cos\varphi$
$y = R \cdot \sin\varphi$
$z = H$
$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$r \in (0, R)$

$$\Phi_4 = \int_S H \cdot r\sin\varphi \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} dsdt$$

$$\Phi_4 = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} d\varphi dz$$

$$\Phi_4 = H \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\varphi d\varphi dz = 0$$

$$\Phi_4 = 0$$

9 Celkový tok tělesem

$$\Phi = \sum_{i=1}^{4} \phi_i = \frac{1}{4}\pi R^2 H^2 + \frac{2}{3} R^3 H$$

Powered by $\LaTeX\,2_\varepsilon$