F2422 - HW7 - 11. května 2006

Petr Šafařík

11. května 2006

Obsah

1 Příklad 6.

1.1 Zadání

Přímou integrací (tj. z definice) i užitím vhodné integrální věty vypočtete práci silového pole $\vec{F} = (xy; x+y)$ po okraji obdélníku $0 \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ orientovaném proti směru pohybu hodinových ručiček.

1.2 Přímý výpočet

$\vec{F} = (xy; x + y)$

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r}$$

$$W = \int_C F_x dx + \int_C F_y dy$$

1.2.1 ξ_1

$x = t \ldots \frac{dx}{dt} = 1$
$y = -b \ldots \frac{dy}{dt} = 0$
$t \in [0, a]$

$$W_{\xi_1} = \int_0^a \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$W_{\xi_1} = \int_0^a (-bt + (t - b) \cdot 0)\, dt$$

$$W_{\xi_1} = \int_0^a -btdt$$

$$W_{\xi_1} = -b \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^a$$

$$W_{\xi_1} = -\frac{1}{2} a^2 b$$

1.2.2 ξ_2

$x = t \ldots \frac{dx}{dt} = 1$
$y = -b \ldots \frac{dy}{dt} = 0$
$t \in [a, 0]$

$$W_{\xi_2} = \int_a^0 btdt$$

$$W_{\xi_2} = b \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_a^0$$

$$W_{\xi_2} = -\frac{1}{2}ba^2$$

1.2.3 ξ_3

$x = a \ldots \frac{dx}{dt} = 0$
$y = t \ldots \frac{dy}{dt} = 1$
$t \in [-b, b]$

$$W_{\xi_3} = \int_{-b}^{b}(0 + (a + t))dt$$

$$W_{\xi_3} = 2ab + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-b}^{b}$$

$$W_{\xi_3} = 2ab$$

1.2.4 ξ_4

$x = 0 \ldots \frac{dx}{dt} = 0$
$y = t \ldots \frac{dy}{dt} = 1$
$t \in [-b, b]$

$$W_{\xi_4} = \int_{-b}^{b} t dt$$

$$W_{\xi_4} = 0$$

1.2.5 Závěr

$$W = \sum_{i=1}^{4} W_{\xi_i} = 2ab - a^2 b$$

1.3 Výpočet integrální větou

1.3.1 Stokesova věta

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = \int\int rot\vec{F} d\vec{s}$$

1.3.2 Výpočet

$$\int\int rot\vec{F} d\vec{s} = \int\int (rot\vec{F})_x dydz + \int\int (rot\vec{F})_y dzdx + \int\int (rot\vec{F})_z dxdy$$

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$\vec{F} = (xy; x + y, 0)$
$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, 1 - x)$

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = \int\int (rot\vec{F})_z dxdy = \int_{-b}^{b}\int_{0}^{a} (1 - x)dxdy = 2ab - a^2 b$$

1.3.3 Závěr

$$W = 2ab - a^2 b$$

2 Příklad 7.

2.1 Zadání

Určete (přímo nebo použitím vhodné integrální věty) tok vektoru intenzity gravitanho pole buzeného částicí o hmotnosti m umístěnou v počátku soustavy souřadnic povrchem koule o poloměřu R se středem v pořátku soustavy souřadnic orientovaným vnější normálou.

2.2 Teorie

$$\vec{E} = \kappa m \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \kappa m \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$x = r \cos\varphi \sin\vartheta$
$y = r \sin\varphi \sin\vartheta$
$z = r \cos\vartheta$

$$\oint\oint \vec{E} d\vec{s} = \int\int E_x dydz + \int\int E_y dzdx + \int\int E_z dxdy$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$\vec{e_\varphi} = (\frac{\partial x}{\partial \varphi}; \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \frac{\partial z}{\partial \varphi}) = (-r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\varphi \sin\vartheta, 0)$$

$$\vec{e_\vartheta} = (\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}; \frac{\partial z}{\partial \vartheta}) = (r \cos\varphi \cos\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, -r \sin\vartheta)$$

2.3 Výpočet integrálu $\int\int E_x dydz$

$$\int\int E_x dydz = \kappa m \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r \cos\varphi \sin\vartheta \begin{vmatrix} r\sin\varphi\sin\vartheta & -r\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} d\vartheta d\varphi$$

$$\int\int E_x dydz = \kappa m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\int\int E_x dydz = \frac{3}{4}\pi\kappa m$$

Vzhledem k symetrii koule bude podle všech 3 os bude tok E_x, E_y i E_z stejný.

$$\oint\oint \vec{E} d\vec{s} = 3 \cdot \int\int E_x dydz$$

$$\oint\oint \vec{E} d\vec{s} = 3 \cdot \int\int E_y dzdx$$

$$\oint\oint \vec{E} d\vec{s} = 3 \cdot \int\int E_z dxdy$$

$$\Rightarrow 4\pi\kappa m$$

2.4 Závěr

$\Phi = 4\pi\kappa m$

Powered by $\LaTeX\,2_\varepsilon$