F2422 - HW12 - 24. května 2006

Petr Šafařík

24. května 2006

Obsah

1 Příklad 16.

1.1 Zadání

Nechť $\vec{r} = (x; y; z) \neq 0$. Vypočtěte div$\frac{\vec{r}}{r^3}$.

1.2 Výpočet

$$div(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$f = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.2.1 Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

1.2.2 Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

1.2.3 Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

1.2.4 Konečný součet

$$div(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$div(f) = \left(\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$div(f) = \left(\frac{-2x^2+y^2+z^2+x^2-2y^2+z^2+x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$div(f) = \frac{0}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

1.3 Závěr

$$div(f) = 0$$

2 Příklad 17.

2.1 Zadání

Dokažte, že pro libovolné funkce f, g platí: grad $(fg) = (\text{grad}f)g + f\text{grad}g$.

2.2 Řešení

grad $(fg) = (\mathrm{grad} f)g + f\mathrm{grad} g$.

$$grad(fg) = (fg_x + f_x g, fg_y + f_y g, fg_z + f_z g)$$

$$grad(f) = (f_x, f_y, f_z)$$

$$grad(g) = (g_x, g_y, g_z)$$

Identita tedy je

$$grad(fg) = (grad(f))g + f(grad(g))$$

čili:

$$(fg_x + f_x g, fg_y + f_y g, fg_z + f_z g) = g(f_x, f_y, f_z) + (g_x, g_y, g_z)f$$

$$(fg_x + f_x g, fg_y + f_y g, fg_z + f_z g) = (f_x g, f_y g, f_z g) + (fg_x, fg_y, fg_z)$$

$$(fg_x + f_x g, fg_y + f_y g, fg_z + f_z g) = (f_x g + fg_x, f_y g + fg_y, f_z g + fg_y)$$

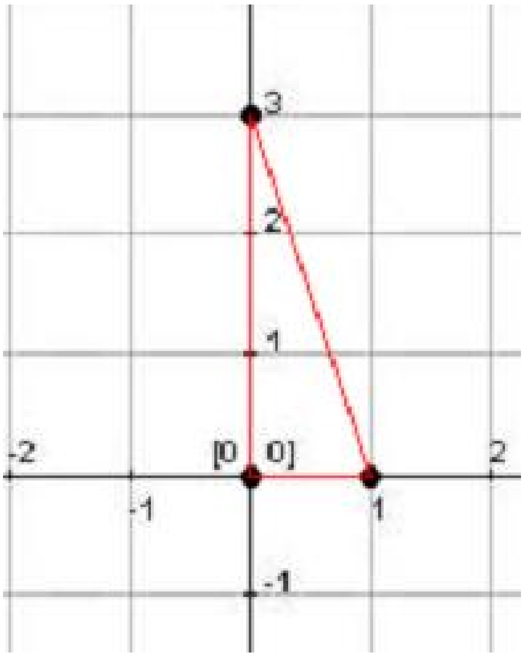
$$(fg_x + f_x g, fg_y + f_y g, fg_z + f_z g) = grad(fg)$$

3 Příklad 18.

3.1 Zadání

Přímo i užitím vhodné integrální věty, je-li to možné, určete práci síly $\vec{F} = (x^2; x + 2y; 0)$ po stranách pravoúhlého trojúhelníka s vrcholy $A = [1; 0]$, $B = [0; 3]$, $C = [0; 0]$ orientovaným proti směru pohybu hodinových ručiček.

3.2 Obrázek



3.3 Přímý výpočet

$\vec{F} = (x^2; x + 2y; 0)$

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r}$$

$$W = \int_C F_x dx + \int_C F_y dy + \int_C F_z dz = 0$$

Přičemž:

$$\int_C F_z dz = 0$$

3.3.1 ξ_1

$x = t \ldots \frac{dx}{dt} = 1$
$y = 0 \ldots \frac{dy}{dt} = 0$
$t \in [0, 1]$

$$W_{\xi_1} = \int_0^1 \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$W_{\xi_1} = \int_0^1 \left(t^2 + 0 \right) dt$$

$$W_{\xi_1} = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$W_{\xi_1} = \frac{1}{3}$$

3.3.2 ξ_2

$x = 0 \ldots \frac{dx}{dt} = 0$
$y = t \ldots \frac{dy}{dt} = 1$
$t \in [3, 0]$

$$W_{\xi_2} = \int_3^0 \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$W_{\xi_2} = \int_3^0 -2t dt$$

$$W_{\xi_2} = \left[\frac{2t^2}{2} \right]_3^0$$

$$W_{\xi_2} = -9$$

3.3.3 ξ_3

$x = t \ldots \frac{dx}{dt} = 1$
$y = -3t + 3 \ldots \frac{dy}{dt} = -3$
$t \in [0, 1]$

$$W_{\xi_3} = \int_1^0 \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$W_{\xi_3} = \int_1^0 (t^2 - 3(t + 2(3 - 3t)))dt$$

$$W_{\xi_3} = \left[\frac{t^3}{3} + 15\frac{t^2}{2} - 18t \right]_1^0$$

$$W_{\xi_3} = \frac{-2 - 45 + 108}{6}$$

$$W_{\xi_3} = \frac{61}{6}$$

3.3.4 Výsledná práce W

$$W = \sum_{k=1}^{3} \xi_k$$

$$W = \frac{1}{3} - 9n + \frac{61}{6}$$

$$W = \frac{3}{2}$$

3.4 Pomocí integrální věty

3.4.1 Stokesova věta

$$\oint \vec{F}d\vec{l} = \int\int rot\vec{F}d\vec{s}$$

3.4.2 Výpočet

$$\int\int rot\vec{F}d\vec{s} = \int\int (rot\vec{F})_x dydz + \int\int (rot\vec{F})_y dzdx + \int\int (rot\vec{F})_z dxdy$$

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$\vec{F} = (x^2; x + 2y, 0)$
$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (0, 0, 1)$

$$\oint \vec{F}d\vec{l} = \int\int (rot\vec{F})_z dxdy = \int_0^3\int_0^1 dxdy$$

$$\int_0^3\int_0^1 dxdy = -3$$

Z obrázku:

3.4.3 Závěr

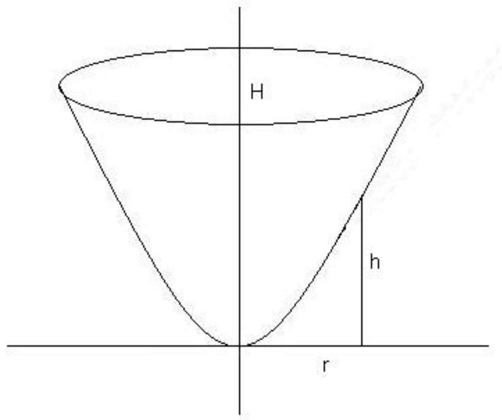
$$W = \frac{3}{2}$$

4 Příklad 19.

4.1 Zadání

Přímo i užitím vhodné integrální věty, je-li to možné, určete objem tělesa (zakreslete jej!) $T = f_{(x;y;z)}|z = x^2 + y^2; 0 \leq z \leq H$.

4.2 Obrázek



4.3 Přímo

$x = r \cdot \cos\varphi \ldots \varphi \in (0, 2\pi)$
$y = r \cdot \sin\varphi$
$z = z \ldots z \in (0, r^2)$
$|J| = r$

$$V = \int\int\int r d\varphi dz dr$$

$r \in (0, \sqrt{z})$;$\varphi \in (0, 2\pi)$;$z \in (0, H)$

$$V = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r dr d\varphi dz$$

$$V = 2\pi \int_0^H \int_0^{\sqrt{z}} r dr dz$$

$$V = 2\pi \int_0^H \frac{z}{2} dz$$

$$V = \pi \int_0^H z dz$$

$$V = \frac{1}{2}\pi H^2$$

4.4 Integrální větou

$$\oint\oint \vec{F} d\vec{s} = \int\int\int div\vec{F} dV$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1$$

Tomuto odpovídá například:

$$\vec{F} = (x, 0, 0)$$

$$\oint\oint \vec{F} d\vec{s} = \int\int F_x dydz$$

$x = R\cos\varphi \ldots r \in (0, \sqrt{H})$
$y = R\sin\varphi \ldots \varphi \in (0, 2\pi)$
$z = x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$
$v_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) \Rightarrow v_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r)$
$v_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) \Rightarrow v_1 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$V = \int_0^{\sqrt{H}} \int_0^{2\pi} r\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\varphi & 2r \\ r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\varphi dr$$

$$V = \int_0^{\sqrt{H}} \int_0^{2\pi} -2r^3\cos^2\varphi d\varphi dr$$

$$V = \pi\left(2\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{H}}\right)$$

$$V = \frac{1}{2}\pi H^2$$

5 Příklad 20.

5.1 Zadání

Pro spektrální objemovou hustotu záření absolutně černého tělesa o termodynamické teplotě T platí tzv. Planckův vyzařovací zákon

$$\rho_P(\vartheta; T) = \frac{8\pi\vartheta^2}{c^3}\frac{h\vartheta}{e^{\frac{h\vartheta}{kt}} - 1}$$

, kde ϑ je frekvence záření, h (resp. k) je Planckova (resp. Boltzmannova) konstanta a c je rychlost světla. Ukažte, že pro malé frekvence nebo vysoké teploty (tj. pro $h\vartheta << kT$) mužeme tento vztah přepsat do přibližného tvaru (*tzv. Rayleighuv-Jeansův zákon*)

$$\rho_{RJ}(\vartheta; T) = konst \cdot \vartheta^2 T$$

(Konstantu úmernosti rovnež určete.)

5.2 Řešení

e^x si rozepíšeme Taylorovým rozvojem na

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{(k)}}{k!}$$

Následně místo x dosadíme $\frac{h\vartheta}{kt}$ získáme:

$$1 + \frac{\frac{h\vartheta}{kT}}{1!} + \frac{\frac{h\vartheta}{kT}^2}{2!} + ... + \frac{\frac{h\vartheta}{kT}^{(k)}}{k!}$$

Jelikož je ale $h\vartheta$ mnohem menší než kT. tak stačí brát v úvahu pouze první dva členy, tedy $1 + \frac{hv}{kT}$, protože $\left(\frac{hv}{kT}\right)^2$ je mnohem mnohem menší než jedna (když už první mocnina je mnohem menší než jedna) a další členy jsou ještě daleko menší.
Dosadíme tedy do Plancova vyzařovacího zákona místo $e^{\frac{h\vartheta}{kT}}$ jen $1 + \frac{h\vartheta}{kT}$.
Tedy:

$$\rho_P(\vartheta; T) = \frac{8\pi\vartheta^2}{c^3} \frac{h\vartheta}{1 + \frac{h\vartheta}{kT} - 1}$$

$$\rho_P(\vartheta; T) = \frac{8\pi\vartheta^2}{c^3} \frac{h\vartheta}{\frac{h\vartheta}{kT}}$$

$$\rho_P(\vartheta; T) = \frac{8\pi\vartheta^2}{c^3} \frac{1}{\frac{1}{kT}}$$

$$\rho_P(\vartheta; T) = \frac{8\pi\vartheta^2}{c^3} kT$$

$$\rho_P(\vartheta; T) = \frac{8k\pi}{c^3} \vartheta^2 T$$

Kde $\frac{8k\pi}{c^3}$ je konstantou a proměnnými jsou právě ϑ a T.