F3170 - Obecná astronomie
Otázka 11
Newtonovy pohybové zákony. Newtonův gravitační zákon. Problém dvou těles. Upřesněná podoba Keplerových zákonů.

Petr Šafařík

1 Newtonovy pohybové zákony

První Newtonův pohybový zákon: Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

Druhý Newtonův pohybový zákon: Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{Výslednice sil působí ve směru vektoru } \vec{a}.$$

Třetí Newtonův pohybový zákon: Jestliže jedno těleso působí silou na druhé těleso, pak i druhé těleso působí na první těleso stejně velkou silou opačného směru. Síly současně vznikají a zanikají.

2 Newtonův gravitační zákon

Každá dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2, která můžeme dostatečně přesně aproximovat body, nebo jsou s dostatečnou přesností nahraditelná koulí na sebe působí gravitační silou přímo úměrnou hmotnostem těles a nepřímo úměrnou čtverci jejich vzdálenosti:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde G je gravitační konstanta $G = 6,67 \mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}\mathrm{kg}^{-1}$.

V případě, že se jedná o homogenní gravitační pole, můžeme sílu vyjádřit vzorcem

$$F = m \cdot g \qquad g = G\frac{M}{R^2},$$

kde R je vzdálenost od středu tělesa.

3 Problém dvou těles

Definujeme těžiště soustavy T. Toto těžiště se nepohybuje se zrychlením. Pokud polohový vektor těžiště T označíme $\vec{T}$, poté

$$\vec{T} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}.$$

Máme-li dvě tělesa, problém se zúží na

$$\vec{T} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

Umístíme-li do těžiště počátek vztažné soustavy ($\vec{R} = \vec{0}$), tak získáme jednoduchý vztah:

$$\vec{r_1} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r_2}$$

Dále zde platí Zákon zachování energie:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - G\frac{m_1m_2}{r}$$

Pokud máme systém, ve kterém je $m_1 \ll m_2$ (planeta m a Slunce M), poté si můžeme přeznačit a přepsat rovnici do tvaru

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

Každou soustavu dvou těles tedy můžeme zařadit do jedné ze skupin:

1. $E < 0$ — soustava vázaná — pohyb po elipse
2. $E = 0$ — pohyb po parabole — velmi nestabilní
3. $E > 0$ — pohyb po hyperbole

4 Keplerovy zákony

První Keplerův zákon: Tělesa se v rovině pohybují po kuželosečkách v jejichž společném ohnisku je těžiště soustavy.

Druhý Keplerův zákon: "Zákon ploch" Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za stejný čas jsou stejně velké.

Třetí Keplerův zákon: Označme γ_i zrychlení vyvolané tělesem i.

$$\gamma_i = G\frac{m_i}{r^2}$$

V případě soustavy dvou těles platí, že každé těleso zvlášť vyvolá gravitační zrychlení:

$$\gamma_1 = G\frac{m_1}{r^2} \qquad \gamma_2 = G\frac{m_2}{r^2}.$$

Celkové zrychlení γ působící mezi těmito dvěma tělesy je:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = G\frac{m_1}{r^2} + G\frac{m_2}{r^2},$$

$$\gamma = G\frac{m_1 + m_2}{r^2}.$$

Jako těžší těleso bereme většinou Slunce, proto hmotnost m_1 položíme rovnu $m_1 = 1$. Tedy

$$\gamma = G\frac{M + 1}{r^2}.$$

$$F = m \cdot \gamma$$

$$\frac{G(M+1)}{r^2} = \frac{F}{m} = \frac{v^2}{r} \qquad v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G(M+1) = v^2 r = r \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$G(M+1) = \frac{4\pi R^3}{T^2}$$

Pokud tento vztah použijeme na dvě tělesa, pak vzájemné působení tělesa o hmotnosti 1 a hmotnosti M je následující:

$$\begin{aligned} G(M+1) &= \tfrac{4\pi R_1^3}{T_1^2} \\ G(M+1) &= \tfrac{4\pi R_2^3}{T_2^2} \end{aligned}$$

Vykrácením rovnice získáme

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\frac{R_1^3}{M+1}}{\frac{R_2^3}{M+1}}$$

Pokud zavedeme aproximaci, že $M \ll 1$, poté se nám vztah zredukuje na známé

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Po přeznačení:

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$