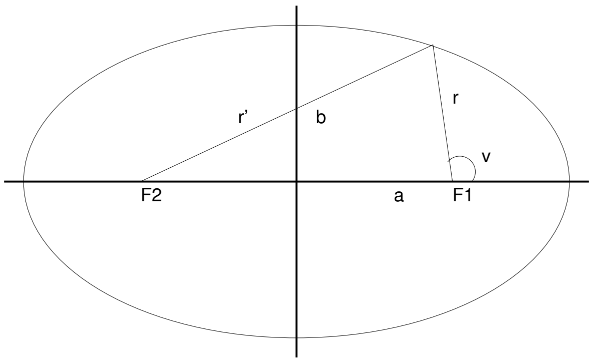
F3170 - Obecná astronomie
Otázka 12
Geometrie trajektorie. Rychlost a poloha tělesa na trajektorii.

Petr Šafařík

1 Geometrie trajektorie

Z Prvního Keplerova zákona víme, že se těleso pohybuje po kuželosečkách. Nyní nás bude zajímat pohyb po elipse. Dále předpokládejme, že $m_1 \ll m_2$ (např. planeta m a Slunce M).



Z obrázku a ze znalostí vlatností elipsy definujeme:

- $a = \frac{1}{2}(r + r')$
- $b = a\sqrt{1 - e^2}$
- $q = a(1 - e)\ldots$ Vzdálenost v pericentru
- $Q = a(1 + q)\ldots$ Vzdálenost v apocentru
- $\nu\ldots$ Pravá anomálie

$$r \sin \nu = r' \sin \nu'$$

$$r \cos \nu - r' \cos \nu = 2ea$$

Po úpravách dostaneme rovnici elipsy v polárních souřadnicích:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

Pro elipsu platí rovnice elipsy:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Plocha elipsy je rovna: $A = \pi ab$

2 Rychlost v dráze

Rozložíme-li si rychlost $\vec{v}$ na dvě složky, tečnou $\vec{v_t}$ a radiální $\vec{v_r}$, jsme s to vyjádřit Keplerův Zákon ploch následovně:

$$\frac{r \cdot v_t}{2} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathrm{konst.}$$

Složky je možné pochopit následovně:

Tečná rychlost: Dá se pochopit jako změna pravé anomálie v čase, kterou vynásobíme vzdáleností.

$$\vec{v_t} = \vec{r}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}$$

$$v_t = \frac{2\pi a}{P}\frac{1 + e\cos\nu}{\sqrt{1-e^2}}$$

Radiální rychlost: Dá se pochopit jako změna velikosti polohového vektoru v čase.

$$\vec{v_r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$v_r = \frac{2\pi a}{P}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin\nu$$

Výsledná rychlost: Je složením tečné a radiální rychlosti.

$$\vec{v} = \vec{v_t} + \vec{v_t}$$

Po vyjádření a úpravách získáme

$$v^2 = G\,(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Rychlosti v pericentru/apocentru

$$v_{\mathrm{P/A}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1 \pm e}{1 \mp e}}$$

3 Poloha tělesa v tráze

Místo času si definujeme rovnoměrně plynoucí veličinu střední anomálie M:

$$M = \frac{2\pi}{P}\,(t' - T)\,,$$

kde T je čas průchodu pericentrem.

Podle 2.Keplerova zákona platí, že

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{t}{P} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta A = \frac{\pi ab \cdot t}{P}$$

Definujme E jako excentrickou anomálii. Po úpravách získáme Keplerovu rovnici:

$$M = E - e \sin E$$

Nemá obecné řešení. Výsledek počítáme pomocí iterací. Známe-li hodnotu E v okamžiku t, jsme s to spočítat pravou anomálii ν a vzdálenost od těžiště r pomocí následujících vztahů:

$$r = a\,(1 - e\cos E)$$

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\frac{E}{2}.$$

Postup zjištění polohy tělesa:

Známe	Získáme
Doba po průchodu tělesa pericentrem, perioda	M
M, excentricita e	E
E, velikost hl. poloosy a	r, ν

Tímto získáme kompletní informace o poloze tělesa v rovině.