F3170 - Obecná astronomie
Otázka 14
Problém tří a více těles. Restringovaný problém tří těles a jeho aplikace. Lagrangeovy librační body. Rocheovy plochy. Poruchy. Sféry aktivity. Slapy, Rocheova mez.

Petr Šafařík

1 Problém tří a více těles

Problém 2 těles je celkem záležitost akademická, neboť nikde ve známém vesmíru nejsou pouze dvě vzájemně se ovlivňující tělesa (vždy je jich víc). Pro n těles musíme vyřešit $3 \times n$ diferenciálních rovnic. Výslednice síly se dá napsat jako:

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{(\vec{r_i} - \vec{r_j})}{(r_i - r_j)^3}$$

Máme tedy $3n$ diferenciálních rovnic a $6n$ integrálů pohybu. Celkem pro 3 tělesa tedy 18 integrálů. Celkem jich známe jen 10. Např. že se těžiště soustavy pohybuje rovnoměrně přímočeře. Dále zákon zachování momentu hybnosti se dá napsat v rovnici jako:

$$\sum m_i \left(\vec{r_i} \times \dot{r_i} \right) = \text{konst} \begin{pmatrix} \sum m_i (x_i \dot{y_i} - y_i \dot{x_i}) \\ \sum m_i (y_i \dot{z_i} - z_i \dot{y_i}) \\ \sum m_i (z_i \dot{x_i} - x_i \dot{z_i}) \end{pmatrix}$$

Další z rovnic je plyne ze zákona zachování energie, kde $\Phi = -G \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$ je potenciální energie:

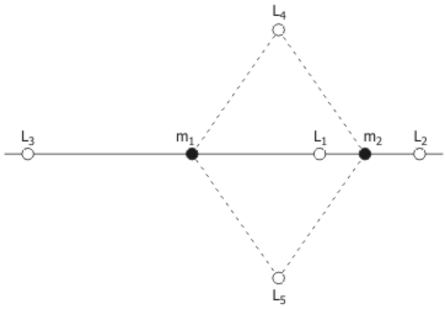
$$\frac{1}{2} \sum m_i (\dot{r_i})^2 + \Phi = \text{konst.}$$

Žádné další matematické postupy nevedou k nalezení dalších integrálů. Neexistuje tak analytické řešení. To je možné nalést jen ve velmi speciálních případech: Restringovaný problém 3 těles.

Restringovaný problém tří těles, lagrangeovy librační body Pokud máme 3 tělesa, kdy jedno

$$m_3 \ll m_1 < m_2,$$

pak v rovině objehu existují význačné body, tzv. Lagrangeovy librační body.



Tělesa umístěná do libračního bodu zde mohou setrvat libovolně dlouhou dobu. Nejstabilnější body L_4 a L_5. Ve Sluneční Soustavě je to např. systém Slunce – Jupiter – Trójani.

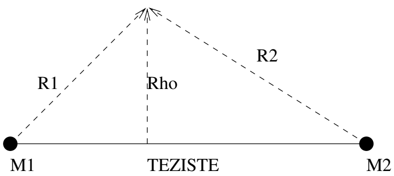
Ekvipotenciální plochy jsou plochy stejného potenciálu. Při pohybu po nich nevykonáváme práci. Kolem hmotného bodu (koule) je ekvipotenciála sféricky symetrická (koule) o

$$\Phi = -G\frac{M}{r}$$

Pokud tato koule rotuje, změní se potenciální energie o potenciální energii rotace (ρ vzdálenost od rotační osy a ω je úhlová rychlost):

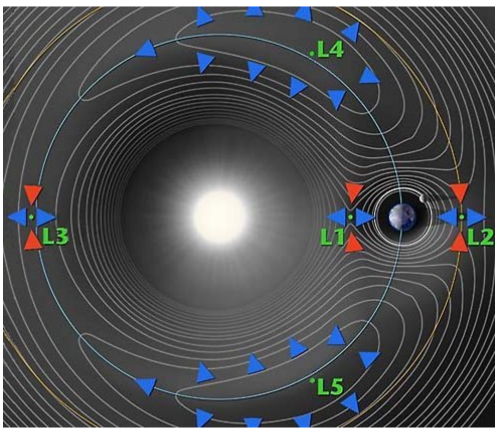
$$\Phi = -G\frac{M}{r} - \frac{\rho^2\omega^2}{2}$$

Další případ by byly dvě tělesa s vázanou rotací M_1 a M_2 obáhající po kruhových drahách.



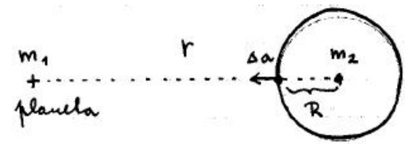
Úhlovou rychlost zjistíme ze vztahu $\omega = \sqrt{G\frac{M_1+M_2}{r^3}}$

$$\Phi = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\omega^2\rho^2}{2}$$



Rocheova plocha plocha pod ekvipotenciálou procházející vnitřním lagrangeovým bodem. Pod ní je oblast, která patří tomu kterému tělesu. Překročí-li ji, ohrozí tím stabilitu, neb za ní se nachází oblast náležící i druhému tělesu.

Na soustavu družice–planeta působí na povrchu satelitu (poloměr satelitu R) diferenciální zrychlení Δa.



$$\Delta a = -\frac{GM}{(r-R)^2} - \frac{GM}{r^2}$$

$$\Delta a \doteq -2\frac{GM}{r^3}R$$

Nyní musíme ještě přičíst rozdíl odstředivého zrychlení:

$$\Delta a = \omega^2(r-R) - \omega^2 r = -\omega^2 R$$

$$\omega^2 = G\frac{m_1+m_2}{r^3} \Rightarrow \Delta a = -3G\frac{M}{r^3}R$$

Rušivé působení na satelit je úměrný třetí mocnině vzdálenosti. Vzdálenější tělesa tvoří homogenní gravitační pole, které již nevytváří diferenciální zrychlení, resp. se neprojeví. Rozdíl zrychlení musí být vyrovnán soudrzností a zrychlením družice.

Gravitační zrychlení na povrchu $g_{\text{sat}} = \frac{Gm_{\text{sat}}}{R^2}$.

Musí platit, že $g_{\text{sat}} > \Delta a$:

$$\frac{\cancel{G}m_{\text{sat}}}{R^2} > -3\cancel{G}\frac{M}{r^3}R$$

$$r = k \cdot R \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_{\text{sat}}}{R^3_{\text{sat}}} > 3\frac{M_{\text{planet}}}{k^3 R^3_{\text{planet}}}$$

Bude-li k_r kritická mez, kdy $g_{\text{sat}} = \Delta a$, pak

$$k_r = \sqrt[3]{3\left(\frac{\rho_{\text{planet}}}{\rho_{\text{sat}}}\right)} = 1,44\sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{planet}}}{\rho_{\text{sat}}}}$$

Rocheova mez V případě, že je satelit plastický, tak se natáhne směrem k planetě. Snadněji se tak roztrhne.

$$k_r = 2,55\sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{planet}}}{\rho_{\text{sat}}}}$$

Poruchy Pro sestavu 3 těles, kdy je planeta P, satelit S ve vzdálenosti r_0 od planety P a rušící těleso M ve vzdálenosti od planety r, pak není zásadní zrychlení působící na planetu, ale rozdíl zrychlení vůči centrálnímu tělesu.

$$a_{\text{ruš}} \doteq 2GM\frac{r_0}{r}$$

Pomocí poruch v dráze Uranu byl objeven Neptun. Pluto byl objeven náhodně (a navíc už to ani není planeta)

Sféra aktivity pro těleso 1 je maximální vzdálenost σ, ve které platí, že

$$\frac{a_{\text{ruš-1}}}{a_1} < \frac{a_{\text{ruš-2}}}{a_2}$$

$$\sigma = r\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

2 Slapové síly

— důsledek gravitačních a odstředivých sil. 6hodin stoupání, 6 klesání vodní hladiny. I Zemská kůra vykazuje slapové pohyby.

Newtonovo vysvětlení slapů: vodní hladina má tendenci vytvorit (vyplnit) ekvipotenciální plochu. Slapově dále působí i Slunce, proto maximální slapy pozorujeme v novu a o úplňku.

Důsledky slapového působení:

- Zpomalovani zemske rotace (asi sekunda za polovinu sto-tisicileti)
- Disipace v zemské kůře
- Vzdalování Měsíce (3cm za rok)
- Země na měsíci kvůli slapům vytvorila vázanou rotaci