F4120 — Teoretická mechanika

10 — Korálek na parabole

Zadání

Korálek o hmotnosti m klouže bez tření podél drátu, který má tvar paraboly $y = Ax^2$. Gravitační pole je vertikální. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice.

Energie a Lagrangián

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$
$$V = mgy$$

$$y = Ax^2$$
$$\dot{y} = 2A\dot{x}x$$

Je třeba si uvědomit, že se jedná o derivaci součinu[1]:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(2A\dot{x}x\right)^2$$
$$V = mgAx^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2mA^2\dot{x}^2x^2 - mgAx^2$$

Řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Pro souřadnici x:

$$(m\ddot{x} + m\ddot{x}4A^2x^2) = 4mA^2\dot{x}^2x - 2mgAx$$

Smíšené členy[2] vypadnou, budou zanedbatelně malé. Zbývá tedy pak:

$$\ddot{x} + 2Agx = 0$$

Řesení této diferenciální rovnice budeme hledat ve tvaru:

$$x(t) = X_0 \sin\left(\omega_0 t\right)$$

kde je podle očekávání $\omega_0 = \sqrt{2Ag}$. X_0 je dáno výškou, ve které se korálek po drátu pustí.

[1] Derivace součinu funkcí:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$
$$(f(x)\cdot f(x))' = 2f(x)f'(x)$$

[2] Členy obsahující jak x tak i její derivace $\dot{x}$ a $\ddot{x}$