

F4120 — Teoretická mechanika

11 — Částice ve zmrzlinovém kornoutu

Zadání

Částice o hmotnosti m klouže po vnitřní ploše kuželu. Osa kuželu je orientovaná vertikálně s vrcholem dolů. Zapište Lagrangeovy pohybové rovnice a vyjádřete moment hybnosti částice ve vertikálním směru (osa z).

Energie a Lagrangián

Budeme pracovat ve sférických souřadnicích. Dále víme, že se úhel α (jinde zvaný θ) nebude měnit - je konstantní.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \alpha)$$

$$V = mgr \cos \alpha$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha$$

Řešení rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Pro souřadnici r :

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha$$

Na pravé straně se zde vyskytuje součet odstředivé síly a příslušné složky gravitační síly (ačkoli se slovo 'síla' říkat nesmí ;).

Pro souřadnici φ :

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha) = 0$$

Takto zapsaná rovnice je pouze jiný přepis pro zákon zachování momentu hybnosti.