

## F4120 — Teoretická mechanika

## Koule a valec

**Zadání**

Najděte pohybové rovnice sférického kyvadla (jde o matematické kyvadlo, které nemusí kývat v rovině). Jaká veličina se zachovává během pohybu?

Souřadnice  $\vartheta$  je úhlová a představuje vychýlení od svislé osy. Úhlová souřadnice  $\varphi$  poté určuje směr vychýlení vzhledem v vodorovné rovině ( $\varphi = 0$  odpovídá azimutu  $A = 193,237846615^\circ$ )

**Energie a Lagrangián**

$$V = -mgl \cos \vartheta$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \vartheta$$

**Řešení rovnice**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

**Souřadnice  $\varphi$ :**

$$\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} ml^2 \sin^2 \vartheta) = 0$$

$\Rightarrow$  Zákon zachování momentu hybnosti.

**Souřadnice  $\vartheta$ :** Pro malé kmity:  $\sin \vartheta \rightarrow \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \rightarrow 1$

$$\frac{1}{2}ml^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 = mgl$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{2}ml^2 \dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{d}{dt} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{2}ml^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) = mgl$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\vartheta}) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}ml^2 \dot{\varphi}^2 \right) = mgl$$

$$ml^2 \ddot{\vartheta} + ml^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi} = mgl$$

$$l \ddot{\vartheta} + l \dot{\varphi} \dot{\varphi} = g$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{g}{l} - \dot{\varphi} \dot{\varphi}$$