

F4120 — Teoretická mechanika

Koule a valec

Zadání

Válec o poloměru r_V a hustotě ρ_V a koule o poloměru r_K a hustotě ρ_K se valí po téže nakloněné rovině. Které z obou těles dosáhne většího zrychlení? Jak závisí odpověď na hodnotách ρ_{VK} , r_{VK} ?

Válec**Energie a Lagrangián**

$$J = \frac{1}{2}mr_V^2$$

$$m = \rho\pi r_V^2 v$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{r_V}\right)^2$$

$$T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

$$U = mgh = \rho\pi r_V^2 v g x \sin \alpha$$

$$L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - mgx \sin \alpha$$

Řešení rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} = mg \sin \alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

Koule**Energie a Lagrangián**

$$J = \frac{2}{5}mr_K^2$$

$$m = \rho\frac{4}{3}\pi r_K^3$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr_K^2 \left(\frac{\dot{x}}{r_K}\right)^2$$

$$T = \frac{7}{10}m\dot{x}^2$$

$$U = mgh = mgx \sin \alpha$$

$$L = \frac{7}{10}m\dot{x}^2 - mgx \sin \alpha$$

Řešení rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$$