F7070 — Statistická fyzika a termodynamika

7 — Foton

Zadání

Ukažte, že entropie na každý jeden foton záření černého tělesa je nezávislá na teplotě a že v d dimenzionálním prostoru můžeme psát:

$$\frac{S}{N} = \frac{\zeta\left(d+1\right)}{\zeta\left(d\right)}$$

Ukažte také, že výsledek by byl $d+1$, pokud by se fotony řídily Boltzmannovou – klasickou – statistikou.

Řešení

Entropii se pokusíme určit ze vztahu (1), že entropie je záporně vzatá derivace Landauova potenciálu dle teploty

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \tag{1}$$

Ideální kvantový plyn je možné popsat stavem jedné částice v tomto plynu

$$\Omega = T \sum_i \ln\left(1 - \mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right) \tag{2}$$

Sumu můžeme vyjádřit jako integrál přes všechny jednočásticové stavy s energií v intervalu $(\varepsilon, \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon)$. Rovnici (2) tak přepíšeme do integrálního tvaru

$$\Omega = T \int \rho\left(\varepsilon\right) \mathrm{d}\varepsilon \ln\left(1 - \mathrm{e}^{(\varepsilon_i-\mu)/T}\right) \tag{3}$$

přičemž $\rho(\varepsilon)$ je hustota energiových stavů.

Přejdeme do $d$rozměrného prostoru. Počet stavů v objemu $\mathrm{d}^d\mathbf{k} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \mathrm{d}^d\mathbf{k}$ Takže

$$\rho\left(\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \mathrm{d}V$$

Máme-li $d$rozměrnou sféru, tak její objem V je vyjádřen vztahem

$$V = \frac{\pi^{d/2} R^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$$

Protože nepotřebujeme V, ale $\mathrm{d}V$, zderivujeme V a získáme:

$$\mathrm{d}V = \frac{d\pi^{d/2} r^{d-1}}{\frac{d}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\mathrm{d}r = \frac{2\pi^{d/2} r^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\mathrm{d}r$$

V našem případě je $r = k$, proto:

$$\mathrm{d}V = \frac{2\pi^{d/2} k^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\mathrm{d}k \tag{4}$$

Pro lepší počítání vynásobíme (4) $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}$. Navíc uvažujeme pouze kladné hodnoty k, proto vydělíme (4) výrazem 2^d. Uvážíme-li obě části, dostaneme

$$\mathrm{d}V_k = \frac{2\pi^{d/2}k^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)2^d}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon$$

Vrátíme-li se k výrazu

$$\rho\left(\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \mathrm{d}V$$

a dosadíme

$$\rho\left(\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}k^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)2^d}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon$$

Fotony považujeme za ultrarelativistický plyn (pohybují se rychlostí světla). Platí tedy, že energie $\varepsilon = \hbar k c$. Odtud $k = \frac{\varepsilon}{\hbar c}$ Dále je výraz potřeba vynásobit počtem polarizací (# = 2)

$$\rho\left(\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon = 2\times\left(\frac{L}{\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)2^d}\left(\frac{\varepsilon}{\hbar c}\right)^{d-1}\frac{1}{\hbar c}\mathrm{d}\varepsilon$$

Matematicky upravíme

$$\rho\left(\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)2^d}\varepsilon^{d-1}\left(\frac{1}{\hbar c}\right)^d\mathrm{d}\varepsilon$$

$$\rho\left(\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\varepsilon^{d-1}\mathrm{d}\varepsilon \tag{5}$$

Dosadíme do rovnice (3) a integrační meze zvolíme v intervalu $(0,\infty)$

$$\Omega = T\int_0^\infty \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\varepsilon^{d-1}\mathrm{d}\varepsilon\ln\left(1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right) \tag{6}$$

Před integrál vytkneme vše, co je nezávislé na integrační proměnné

$$\Omega = T\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\int_0^\infty \varepsilon^{d-1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right)\mathrm{d}\varepsilon \tag{7}$$

Integrál $\int_0^\infty \varepsilon^{d-1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right)\mathrm{d}\varepsilon$ určíme metodou per-partes:

$$u = \ln\left(1-\mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right) \qquad v' = \varepsilon^{d-1}$$

$$u' = \frac{\mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T}}{1-\mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T}}\frac{1}{T} \qquad v = \frac{1}{d}\varepsilon^d$$

Přičemž u' je možné přepsat $u' = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}-1}\frac{1}{T}$ Nyní zintegrujeme:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{d-1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right)\mathrm{d}\varepsilon = \left[\ln\left(1-\mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T}\right)\frac{1}{d}\varepsilon^d\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d-1}}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}-1}\frac{1}{T}\mathrm{d}\varepsilon$$

Po dosazení mezí, zjistíme, že

$$\left[\ln\left(1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right)\frac{1}{d}\varepsilon^d\right]_0^\infty = 0$$

Integrál se nám tedy zjednoduší:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{d-1}\ln\left(1-\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}\right)\mathrm{d}\varepsilon = -\frac{1}{T}\frac{1}{d}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^d}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}-1}\mathrm{d}\varepsilon$$

Dosadíme tedy zpátky do výrazu pro Landauův potenciál (rovnice (7)).

$$\Omega = -T\left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{1}{T}\frac{1}{d}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^d}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}-1}\mathrm{d}\varepsilon \tag{8}$$

Abychom mohli počítat dál, je třeba zavést substituci pro výrazy:

- $x = \dfrac{\mu}{T}$
- $y = \dfrac{\varepsilon}{T}$

Z výše uvedeného plyne, že $\varepsilon = Ty$; $\varepsilon^d = T^d y^d$ a konečně $\mathrm{d}\varepsilon = T\mathrm{d}y$ Dosadíme tedy substituce:

$$\Omega = -T\left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{1}{T}\frac{1}{d}\int\limits_0^\infty \frac{T^d y^d}{\mathrm{e}^{(y-x)}-1}T\mathrm{d}y$$

a trochu upravíme

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{T^{d+1}}{d}\int\limits_0^\infty \frac{y^d}{\mathrm{e}^{(y-x)}-1}\mathrm{d}y$$

Protože se jedná o fotony, je $\mu = 0$, proto i $x = 0$

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{T^{d+1}}{d}\int\limits_0^\infty \frac{y^d}{\mathrm{e}^{(y)}-1}\mathrm{d}y$$

$\int_0^\infty \dfrac{y^d}{\mathrm{e}^{(y)}-1}\mathrm{d}y$ jsme definovali jako funkci $B_d(0)$

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{T^{d+1}}{d}B_d(0) \tag{9}$$

Nyní již můžeme vypočíst entropii podle vztahu (1):

$$S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T}$$

Derivací podle T získáme z (9):

$$S = \left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{d+1}{d}T^d B_d(0) + \left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{T^{d+1}}{d}B_{d-1}(0)\left(-\frac{\mu}{T^2}\right) \tag{10}$$

Ačkoli jsem napsal, že $x = 0$, tak obecně nikoli. Proto je nutné derivovat i toto. Druhý člen v součtu se ovšem rovná nule, proto entropie bude rovna pouze:

$$S = \left(\frac{L}{2\hbar\pi \mathrm{c}}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{d+1}{d}T^d B_d(0) \tag{11}$$

Je třeba vyjádřit celkový počet částic N, abychom mohli vyjádřit poměr $\frac{S}{N}$. Budeme jej hledat jako součet částic v každém stavu.

$$N = \sum_i \overline{n}_i = \int\limits_0^\infty \rho(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\overline{n}_i \tag{12}$$

Stejně jako v příkladu 3. si $\overline{n}_i$ vyjádříve jako $\overline{n}_i = \sum_i n_i P_r$. Fotony se chovají jako bosony, proto můžeme převzít řešení z třetího příkladu, rovnici (3:11), zde ji přepíšu jako rovnici (13)

$$\overline{n}_i = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T}-1} \tag{13}$$

$\rho(\varepsilon)\mathrm{d}$ jsme již vyřešili v rovnici (5). Dosadíme-li tedy rovnice (5) a (13) do (12), získáme:

$$N = \int_0^\infty \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \varepsilon^{d-1} \mathrm{d}\varepsilon \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}$$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d-1}}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} \mathrm{d}\varepsilon \tag{14}$$

Zavedeme stejnou substituci jako výše:
$x = \frac{\mu}{T}$, $y = \frac{\varepsilon}{T} \Rightarrow \varepsilon = Ty$; $\varepsilon^d = T^d y^d$ a konečně $\mathrm{d}\varepsilon = T\mathrm{d}y$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{T^{d-1} y^{d-1}}{\mathrm{e}^{y-x} - 1} T\mathrm{d}y$$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^d \int_0^\infty \frac{y^{d-1}}{\mathrm{e}^{y-x} - 1} \mathrm{d}y$$

A opět integrál upravíme na funkci $B_{d-1}(0)$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^d B_{d-1}(0) \tag{15}$$

Dosadíme do vztahu S/N – za S rovnici (11) a za N rovnici (15):

$$\frac{S}{N} = \frac{\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{d+1}{d} T^d B_d(0)}{\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^d B_{d-1}(0)}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{d+1}{d} \frac{B_d(0)}{B_{d-1}(0)}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{d+1}{d} \frac{\Gamma(d+1)\,\zeta(d+1)}{\Gamma(d)\,\zeta(d)}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{d+1}{d} d \frac{\Gamma(d)\,\zeta(d+1)}{\Gamma(d)\,\zeta(d)}$$

$$\boxed{\frac{S}{N} = (d+1)\frac{\zeta(d+1)}{\zeta(d)}}$$

Boltzmannova statistika

V případě, že by se fotony řídily klasickým Boltzmannovským rozdělením. Změnil by se výraz pro Landauův potenciál — rovnice (8):

$$\Omega = -T \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{T} \frac{1}{d} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^d}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T} 1} \mathrm{d}\varepsilon \tag{16}$$

Protože $(\varepsilon - \mu)/T$ je mnohem větší jak jedna, je možné zanedbat jedničku v $\mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T} - 1$.

$$\Omega = -T \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{T} \frac{1}{d} \int_0^\infty \varepsilon^d \, \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/T} \, \mathrm{d}\varepsilon$$

Protože $\mu = 0$,

$$\Omega = -T\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{T} \frac{1}{d} \int_0^\infty \varepsilon^d \, \mathrm{e}^{-\varepsilon/T} \, \mathrm{d}\varepsilon$$

Zavedeme substituci $\frac{\varepsilon}{T} = y$

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{d} \int_0^\infty y^d T^d \, \mathrm{e}^{-y} \, T \mathrm{d}y$$

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{T^{d+1}}{d} \int_0^\infty y^d \, \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y$$

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{T^{d+1}}{d} \Gamma(d+1)$$

$$\Omega = -\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^{d+1} \Gamma(d)$$

Entropie je podle rovnice (1) rovna $S = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial T}$

$$S = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} (d+1) \, T^d \, \Gamma(d) \tag{17}$$

Počet částic určíme stejně jak v předchozím případě. V rovnici (14) můžeme opět zanedbat jedničku – ze stejných důvodů, jako minule.

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d-1}}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} \mathrm{d}\varepsilon$$

tak přejde v

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty \varepsilon^{d-1} \mathrm{e}^{-\varepsilon/T} \mathrm{d}\varepsilon$$

Uděláme substituci $\frac{\varepsilon}{T} = y$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty y^{d-1} \, \mathrm{e}^{-y} \, T^{d-1} \, T \mathrm{d}y$$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^d \int_0^\infty y^{d-1} \, \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y$$

$$N = \left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^d \, \Gamma(d) \tag{18}$$

Konečně můžeme vyjádřit poměr S/N – S je vyjádřeno v rovnici (17), N je v rovnici (18):

$$\frac{S}{N} = \frac{\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} (d+1) \, T^d \, \Gamma(d)}{\left(\frac{L}{2\hbar\pi c}\right)^d \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} T^d \, \Gamma(d)}$$

$$\boxed{\frac{S}{N} = d+1} \tag{19}$$