Početní praktikum 1

Podzim 2024, 1. zápočtová písemka

doba řešení - cca 90 minut

1. Vypočítejte derivaci funkce $x^{\sin(\ln x)}\,\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

$x^{\sin(\ln x)+1}\left[\dfrac{\sin(\ln x)+\ln x\cdot\cos(\ln x)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{(2-3x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}\right],\quad x\in(0,1\rangle$

2. Vypočítejte integrál funkce $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$. Pokud se to ukáže jako nezbytné, použijte (aspoň na část výpočtu) tzv. univerzální substituci $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=t$, tedy $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, atd. (2,5 bodu)

$\left.\ln(1+\sin x)-\dfrac{2}{1+\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right|_0^{\pi/2}=\ln 2+1$

3. Kruhová deska o poloměru R je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje σ. Vypočítejte celkový elektrický náboj Q desky (pokud by $\sigma=$ konst., potom $Q=\sigma S$ kde S je plocha desky), pokud

$$\sigma=A\,\mathrm{e}^{-2r^2}+B\sqrt{r},$$

kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od středu desky. (2,5 bodu)

$Q=\dfrac{\pi A}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2R^2}\right)+\dfrac{4}{5}\pi BR^2\sqrt{R}$

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}'$ složky $(0,-2,1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1&=\vec{e}\,'_1-\vec{e}\,'_2-2\,\vec{e}\,'_3,\\ \vec{e}_2&=2\,\vec{e}\,'_1-\vec{e}\,'_2+\vec{e}\,'_3,\\ \vec{e}_3&=-\vec{e}\,'_1+\vec{e}\,'_2+3\,\vec{e}\,'_3.\end{aligned}$$

Určete matici $\mathbf{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$, matici $\mathbf{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázích $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Jsou báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvod)? (2,5 bodu)

$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&-1&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}-4&1&-3\\-7&1&-5\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B}')}=(0,-2,1)$, $\vec{a}_{(\mathcal{B})}=(15,-2,11)$

Báze $\mathcal{B}'$ je ortonormální (ze zadání), Báze $\mathcal{B}$ není ortonormální, matice přechodu nemají jednotkový determinant a obě matice nejsou vzájemně transponované.