# Početní praktikum 1

## 1a. zápočtová písemka - podzim 2018

**1.** Vypočítejte derivaci funkce $x^{2\ln(\sin^2 x)}\,\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce. (2,5 bodu)

Výsledek: $x^{2\ln(\sin^2 x)}\left[\dfrac{2}{x}\ln(\sin^2 x)+4\ln x\operatorname{cotg} x+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x^{3/2}}\right]$, $x>0$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

**2.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. (2,5 bodu)

Výsledek: $2\left(\pi^2-4\right)$

**3.** Nevodivý váleček o poloměru $R$ a výšce $H$ je elektricky nabitý s objemovou hustotou náboje $\rho$. Vypočítejte celkový elektrický náboj $Q$ válečku (pokud by $\rho=$ konst., potom $Q=\rho V$, kde $V$ je objem válečku), pokud

$$\rho = A\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}+B(r^2+1),$$

kde $A$, $B$ jsou kladné konstanty a $r$ je vzdálenost od osy válečku. (2,5 bodu)

Výsledek: $Q=\pi H\left[2A\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R^2}{2}}\right)+B\left(\dfrac{R^4}{2}+R^2\right)\right]$

**4.** Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$ složky $(1,2,-1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\vec{e}\,'_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2-\vec{e}_3),\quad \vec{e}\,'_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3),\quad \vec{e}\,'_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3).$$

Určete matici $\boldsymbol{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $\boldsymbol{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Je báze $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvody pro nebo proti) ? Určete velikosti vektoru $\vec{a}$ v obou bázích. (2,5 bodu)

Výsledek: $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{T}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B}')}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Báze $\mathcal{B}'$ je ortonormální, matice přechodu $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$ mají jednotkový determinant a obě matice jsou vzájemně transponované, $||\vec{a}_{(\mathcal{B})}||=||\vec{a}_{(\mathcal{B}')}||=\sqrt{6}$.