

Počtení praktikum 2

3. jarní zápočtová písemka 2024 doba řešení - cca 90 minut

1. Rozviňte funkci $f(x) = x^2 - x$, $x \in \langle -L, L \rangle$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{2L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left[\frac{2L}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right]$$

2. Zadané číslo $\sqrt[7]{4 - \frac{12i}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \sqrt[7]{8} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right) \right], \sqrt[7]{8} e^{i\left(\frac{5\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right)}, k = 0, 1, \dots, 6$$

3. Imaginární část $v(x, y)$ holomorfní funkce $f(z)$ komplexní proměnné $z = x + iy$ má tvar $v = y - \sinh x \sin y$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce z . (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f(z) = z - \cosh z + C$$

4. Tenzor tlaku \mathcal{P} lze zapsat formou

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} - \eta \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial V_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \lambda \frac{\partial V_{\rho}}{\partial x_{\rho}} \delta_{\alpha\beta},$$

kde V_{ξ} jsou složky vektoru rychlosti, p je skalární tlak, η a λ jsou konstanty (koeficienty dynamické a dilatační viskozity). Napište explicitní podobu prvků T_{zx} a T_{zz} tohoto tenzoru a také divergenci tohoto tenzoru (v kartézské soustavě) pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \mathcal{P}_{zx} = -\eta \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right),$$

$$\mathcal{P}_{zz} = p - 2\eta \frac{\partial V_z}{\partial z} - \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V},$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial p}{\partial x_{\alpha}} - \eta \left(\frac{\partial^2 V_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2} + \frac{\partial^2 V_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right) - \lambda \frac{\partial^2 V_{\lambda}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\lambda}} \quad (\text{Einsteinova notace}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{P} = \vec{\nabla} p - \eta \Delta \vec{V} - (\eta + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \quad (\text{vektorový zápis}).$$