Početní praktikum 1

3. zápočtová písemka - podzim 2023

doba řešení - cca 90 minut

1. Vypočítejte y-ovou polohu těžiště y_T jednoho oblouku homogenní cykloidy
$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \; y = R(1 - \cos\varphi), \; \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
(kde x-ová poloha těžiště je v polovině zadané domény, $x_T = \pi R$). Pokud se v řešení vyskytne integrál POLOČÍSELNÉ mocniny výrazu $1 - \sin\varphi$ nebo $1 - \cos\varphi$ (tedy například $\int \sqrt{1-\cos\varphi}\, \mathrm{d}\varphi$), řešte pomocí polovičního argumentu příslušné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y_T = \dfrac{4R}{3}$

2. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla
$$\vec{F} = (x + y, y + z, z + x),$$
která působí v matematicky kladném směru po dráze čtvrtiny závitu válcové šroubovice o poloměru R s osou $(0, 0, z)$. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice $\left(0, R, \frac{\pi b}{2}\right)$, koncový bod dráhy má souřadnice $(-R, 0, \pi b)$, transformační rovnice pro šroubovici jsou: $x = R\cos\varphi, \; y = R\sin\varphi, \; z = b\varphi$. Je toto silové pole konzervativní ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = -\dfrac{\pi R^2}{4} - bR\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\right) + \dfrac{3\pi^2 b^2}{8}$, pole není konzervativní.

3. Dokažte, že dané silové pole
$$\vec{F} = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln y, \; \frac{x}{y} - y^2, \; z^2\right)$$
pro $x \in \langle 0, \infty)$ a $y, z \in \langle 1, \infty)$ je konzervativní a určete potenciální energii E_p v obecném bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud potenciální energie v bodě $x, y, z = (0, 1, 1)$ je rovna $E_p = 1$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $E_p = \sqrt{X_0^2 + 1} + X_0 \ln Y_0 - \dfrac{Y_0^3}{3} + \dfrac{Z_0^3}{3}$

4. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem
$$\phi = \frac{A}{\sqrt{r^2+1}},$$
kde A je kladná konstanta a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete intenzitu $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{3A}{(r^2+1)^{5/2}}$. (2,5 bodu)

   $\vec{E} = \dfrac{A\vec{r}}{(r^2+1)^{3/2}} = \dfrac{A\,(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2+1)^{3/2}}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{3A}{(x^2+y^2+z^2+1)^{5/2}} = \dfrac{3A}{(r^2+1)^{5/2}}$