Početní praktikum 1[1]

3. písemka - podzim 2024 **doba řešení cca 90 minut**

1. Vypočítejte polohu těžiště půlkružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, jejíž lineární hustota τ je dána předpisem $\tau = |x|y$. (2,5 bodu)

$x_T = 0,\ y_T = \dfrac{2}{3}R.$

2. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(x^2,\ xy,\ xz\right)$, působící po křivce dané předpisem $x^2 + (y+1)^2 - 4 = 0$, $z = -1$, z počátečního bodu $A = (2, -1, -1)$ do bodu $B = (-2, -1, -1)$, v matematicky kladném směru (proti směru hodinových ručiček). Je toto silové pole konzervativní? (2,5 bodu)

$W = -2\pi$, pole není konzervativní.

3. Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\exp(r^2 - 1)$ je konzervativní. Pokud ano, určete jeho potenciální energii E_p v bodě $P = (X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$, pokud potenciální energii ve vzdálenosti $r = 1$ od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ stanovíme jako $E_0 = 0$. Veličina k je konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. (2,5 bodu)

$E_p(1,1,1) = \dfrac{k}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$

4. Hypotetické fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -\dfrac{A}{r} - B\ln r$, kde A a B jsou kladné konstanty a r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{B}{r^2}$. (2,5 bodu)

$$\vec{E} = \left(-\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^2}\right)\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{B}{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{B}{r^2}$$

[1] Veličiny jsou uváděny pouze jako velikost, nejsou uváděny příslušné jednotky.