Početní praktikum 1

4. zápočtová písemka[1]

doba řešení - 180 minut

1. Vypočítejte derivaci $f'(x)$ funkce $f(x) = (x\,\mathrm{e}^x)^{\frac{a}{x \ln x}}$, kde a je kladná konstanta. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f'(x) = -\dfrac{a(x+\ln^2 x)}{x^2 \ln^2 x}\,\mathrm{e}^{\frac{a(x+\ln x)}{x \ln x}}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

2. Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\dfrac{3}{2}\left[\ln(x^2+x+1) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left(3\ln 3 - \sqrt{3}\pi\right)$.

3. Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem od osy válce klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí $p = \dfrac{p_0}{1+\left(\frac{r}{3}\right)^2}$, kde p_0 je tlak plynu v ose válce, r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby. (2,5 bodu)

   Výsledek: $18\pi p_0\left[\dfrac{RH}{9+R^2} + \ln\left(1+\dfrac{R^2}{9}\right)\right]$.

4. Vektor $\vec{a}$ má ve standardní kartézské bázi $\mathcal{E}$ složky $(1,1,2)$. Dále jsou zadány dvě báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, přičemž matice R přechodu z báze $\mathcal{E}$ do báze $\mathcal{B}'$ má tvar

$$R(\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Přechod z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \qquad\quad - \vec{e}\,'_2 - 2\vec{e}\,'_3, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}\vec{e}\,'_1 - \frac{3}{2}\vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3, \\ \vec{e}_3 &= \qquad\quad \vec{e}\,'_2 + 3\vec{e}\,'_3. \end{aligned}$$

   Určete matici T přechodu z báze $\mathcal{E}$ do báze $\mathcal{B}$, matici S přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{E}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázích $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Jsou báze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ortonormální (uveďte důvod)? (2,5 bodu)

   $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-9,2,-6)$, $\vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (1,0,2)$, $\mathcal{B}'$ ne, $\mathcal{B}$ ne.

5. Pomocí vhodné substituce řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = \mathrm{e}^{y+x^2} - 2x$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \ln\left(\dfrac{1}{C-x}\right) - x^2$, $x \in (-\infty, C)$.

6. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = 2x^3 - y + 1$ se stanovenou počáteční podmínkou $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = 2x^3 - 6x^2 - 11 + 12(x + \mathrm{e}^{-x})$.

7. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln^2 x$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{C}_2 x\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x}\left(\ln^2 x - 3\ln x + \dfrac{7}{2}\right)$, $x > 0$.

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.

8. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\left[(2-x)\cos x - \sin x\right]$.

9. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (x - y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 1)$, dále po úsečce do bodu $(2, 2)$ a nakonec po čtvrtkružnici se středem v bodě $(2, 0)$ v matematicky kladném směru zpět do výchozího bodu. Jak by se vykonaná práce změnila, kdyby působící síla $\vec{F}(x, y) = (x + y, x)$? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = 2(\pi - 1)$, konzervativní síla - práce by byla nulová.

10. Dokažte, že centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\ln r$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete potenciální energii pole v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud stanovíme její hodnotu v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je jako nulovou. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

    Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = \dfrac{k}{2}\left[\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left(\ln\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right]$.

11. Odvoďte moment setrvačnosti J_k duté koule o poloměru R s kulovou koncentrickou dutinou o poloměru H, s konstantní hustotou ρ, rotující okolo osy, procházející jejím středem. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti M duté koule, jejího poloměru R a poloměru dutiny H. Pomocí limitního přechodu (případně jiným způsobem) následně odvoďte moment setrvačnosti J_s homogenní kulové slupky o poloměru R. (2,5 bodu)

    Výsledek: $J_k = \dfrac{2}{5} M \dfrac{R^5 - H^5}{R^3 - H^3}$, $J_s = \lim\limits_{H \to R} J_k = \dfrac{2}{3} M R^2$.

12. Hypotetické centrální fyzikální pole, definované pro $r \geq 1$, je určeno potenciálem $\phi = -Ar^2 \ln r^2 + B$, kde konstanta A škáluje velikost r polohového vektoru $\vec{r}$, konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\left(6 \ln r^2 + 10\right)$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $\vec{E} = 2A\vec{r}\left(\ln r^2 + 1\right) = 2A(x, y, z)\left[\ln(x^2 + y^2 + z^2) + 1\right]$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A\left(6 \ln r^2 + 10\right)$.