Početní praktikum 2

1b. jarní zápočtová písemka[1]

doba řešení - 60 minut

1. Dokažte platnost vektorové identity:
   $\vec{A} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} A^2 - \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A}.$ (2,5 bodu)
   Výsledek: Na obou stranách bude vektor
   $$\left[A_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \left(A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x, A_z \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_x \frac{\partial A_x}{\partial y} - \left(A_z \frac{\partial}{\partial z} + A_x \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y, \right.$$
   $$\left. A_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial z} - \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} \right) A_z \right].$$

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:
   $\iint_S \sqrt{2}\, x^2 z \, \mathrm{d}S, \quad \text{kde} \quad S = \left\{ x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \in \langle 0, H \rangle \right\}.$ (2,5 bodu)
   Výsledek: $\frac{2\pi R^5}{5}$, $R = H$

3. Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy:
   $S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0 \right\},$
   jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = x^2 + z^2$. (2,5 bodu)
   Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = \frac{9R}{16}$

4. Plášť kulového vodojemu o poloměru $R = 2\,\mathrm{m}$ je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle $10^6\,\mathrm{N}$. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je zhruba na hranici konstrukční odolnosti? Uvažujte zaokrouhlené hodnoty konstant $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky π spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)
   Výsledek: $F_p \approx 10^6\,\mathrm{N}$. Plášť vodojemu je dimenzován zhruba na hranici konstrukční odolnosti.

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.