ZMMF 3: úloha 5

Úlohu odevzdejte nejpozději do 30. ledna 2025

1) Vypracujte numerické řešení tzv. Lane-Emdenovy rovnice stupně $n = 2.71$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + y^{2.71} = 0, \tag{1}$$

s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x}(0) = 0$, metodou **Runge-Kutta 4. řádu** (RK4), pro $x \in (0, D > 0)$, kdy $y\,(x < D) > 0$, $y\,(x = D) = 0$ a $\Delta x = 10^{-3}$ (hodnota "výpočetního kroku" na x-ové ose). Jako nejnižší hodnotu x ve výpočetní oblasti nezadávejte nulu nýbrž Δx, vzhledem k tomu, že v prostředním členu rovnice se x nachází ve jmenovateli.

V předběžných výpočtech se vám pro oblast $x > D$ (pravděpodobně) vypíšou vypočítané hodnoty y jako NaN (not a number); to je způsobené tím, že by zde reálná funkční hodnota y klesla do "záporných čísel", což vzhledem k racionální mocnině y pravděpodobně nemůže. Protože počítaná funkce y ve "fyzikální realitě" většinou vyjadřuje nezáporné stavové veličiny jako je hustota, tlak a teplota, řešení je tak v pořádku. **Vykreslete** jeho graf v oblasti, kde $y \geq 0$.

2) Vypracujte numerické řešení nelineární parciální diferenciální, tzv. Burgersovy rovnice,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

kde u je rychlost advekce tekutiny (tato pohybová rovnice je částí jednorozměrného Navier-Stokesova řešení bez silových účinků), pro $t \in \langle 0{,}100\rangle$ a $x \in \langle 0{,}100\rangle$ (zde zahrňte i bod $x = 0$ do výpočetní oblasti). Prostorový krok zvolte jako $\Delta x \leq 1$, časový krok Δt vyplyne z tzv. **Courantovy podmínky**, ktero zadejte jako cfl = 0.8. Implementujte tzv. **upwind schéma**. Počáteční profil uvažujte jako

$$u(0{,}x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} \tag{3}$$

a okrajové podmínky zadejte následující: $u(t{,}0) = u(0{,}0) = u_0$ ("fixní", tzv. vtoková neboli *inflow* podmínka, v souladu s rovnicí (3)), kdežto $u(t{,}100)$ zvolte jako tzv. volnou (*outflow*) podmínku s *lineární* extrapolací (kdy rozdíl mezi $u(t{,}100)$ a u pro nejbližší sousední x-ovou hodnotu sítě je stejný jako rozdíl u pro toto a ještě následující x). **Vykreslete** pomocí vhodného programu (Gnuplot, Matplotlib, atd.) průběh řešení během zadaného časového intervalu.

K vypracování úlohy použijte libovolný programovací jazyk.