ZMMF 3: úloha 4

Úlohu odevzdejte do 20. prosince 2024

1) Neviskózní Burgersova rovnice je speciální případ nelineární vlnové rovnice, kdy rychlost šíření vlny je daná jako $u(t,x)$. Řešte tuto rovnici s pravou stranou a počáteční podmínkou,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \sin^2 t, \qquad u(0,x) = \alpha - \beta x$$

(kde α a β jsou konstanty) a ověřte správnost výsledku.

2) Fourierovou metodou řešte homogenní vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a počátečními funkcemi

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \ \text{ pro } \ t > 0, \qquad u(0,x) = x, \quad u_t(0,x) = 0,$$

a ověřte správnost výsledku.

3) Obecná rovnice difúze v $\mathbb{R}^3$ je daná následovně,

$$\frac{\partial u(t,x,y,z)}{\partial t} = D\nabla^2 u(t,x,y,z),$$

kde D je difúzní koeficient (obecně nekonstantní, zde ho považujme za konstantu). Fourierovou metodou vyřešte následující parciální diferenciální rovnici v 1D (nehomogenní, tedy se zdrojem difúze), která má následující tvar,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = tx^2,$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a homogenní počáteční podmínkou,

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \ \text{ pro } \ t > 0, \qquad u(0,x) = 0$$

a ověřte správnost výsledku.

4) Řešte následující 2D Poissonovu rovnici se smíšenými okrajovými podmínkami,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 6x - 6, \qquad u(0,y) = y^2, \quad u_x(0,y) = y.$$

Bonusová úloha:

Uvažujme 3D rovnici vedení tepla (de facto difúzní rovnici)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\nabla^2\phi,$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a nehomogenní počáteční podmínkou

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \phi\,(t,\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall\ t, \qquad \phi\,(0,\boldsymbol{x}) \equiv \phi\,(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} \phi_0\,\mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{x}|^2},$$

(kde a je kladná konstanta) normovanou tak, aby $\int_{\mathbb{R}^3} \phi\,(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}^3x = \phi_0$. Ověřte uvedené normování počáteční funkce a nalezněte fundamentální řešení takové rovnice (pomocí Greenovy funkce).