

ZMMF 3: úloha 2

Úlohu odevzdejte do 31. října 2024

Příkladem křivočaré souřadnicové soustavy může být „anuloidová“ soustava, jejíž definice a určující parametry jsou uvedené ve skriptu [Praktické početní metody pro fyziky](#), kapitola 3.5 (abychom jednoznačně odlišili časovou od úhlové proměnné, přejmenujeme zde původně označený úhel t jako θ , i když jeho smysl je jiný než v případě kulových souřadnic):

- 1) Odvodte explicitní podobu operátoru gradientu $\vec{\nabla}$ a divergence vektoru $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ v této soustavě.
- 2) Napište explicitní podobu objemového elementu a plošných elementů dané soustavy.
- 3) Napište explicitní podobu polohového vektoru \vec{r} , vektoru rychlosti \vec{v} a vektoru zrychlení \vec{a} v této soustavě. Pokuste se výsledek fyzikálně interpretovat.
- 4) Nalezněte všechny nenulové Christoffelovy symboly a napište explicitní podobu Riemannova tenzoru, Ricciho tenzoru a Ricciho skaláru ve 2D soustavě definované povrchem anuloidu (kde radiální souřadnice $r = a \equiv \text{const.}$). Označte jednotlivé (nenulové) symboly a členy tenzorů všemi odpovídajícími indexy. Vysvětlující text k těmto pojmům - viz učební text [Praktické početní metody pro fyziky](#), poslední odstavec - Tenzory v zakřiveném prostoročase. K výpočtu použijte balíček Sympy; příkládám vzor obdobného výpočetního skriptu pro příslušné symboly a tenzory v případě 2D sféry. **Upozornění** - i když je ve skriptu požadováno “simplify”, program často výsledné členy v tenzorech neupraví do nejjednodušší podoby, v tom případě překontrolujte tyto členy a maximálně je zjednodušte.

Příklad pythonovského skriptu pro výpočet metrického tenzoru, Christoffelových symbolů, Riemannova a Ricciho tenzoru na 2D sféře - balíček "diffgeom":

```
1 import sympy
2
3 from sympy.diffgeom import *
4 from sympy import simplify, init_printing
5 init_printing(use_unicode=True)
6 #from sympy.physics.units.systems.cgs import cgs_gauss
7
8 from sympy.core.symbol import (Dummy, symbols)
9 from sympy.functions.elementary.miscellaneous import sqrt
10 from sympy.functions.elementary.trigonometric import (acos, atan2, cos, sin)
11 from sympy import pprint, exp, Function
12 from sympy.diffgeom import Manifold, Patch, CoordSystem
13 m = Manifold('sphere', 2)
14 patch = Patch('origin', m)
15 cs = CoordSystem('sphere', patch, symbols('theta', 'phi', real=True))
16
17 from sympy.diffgeom import twoform_to_matrix, TensorProduct, metric_to_Christoffel_1st,
18     metric_to_Christoffel_2nd, metric_to_Riemann_components, metric_to_Ricci_components
19 TP = TensorProduct
20 x = symbols('x')
21 y = symbols('y')
22 r = symbols('r')
23 theta = symbols('theta')
24 phi = symbols('phi')
25
26 theta, phi = cs.coord_functions()
27 dtheta, dphi = cs.base_oneforms()
28
29 metric = r**2*TP(dtheta, dtheta) + 0 + 0 + r**2*sin(theta)**2*TP(dphi, dphi)
30 #in case of a diagonal metrics it is not necessary to write the non-diagonal zero components;
31 #while in case of a non-diagonal metrics, it is necessary to explicitly list them (in line order)!!
32
33 matsphere = twoform_to_matrix(metric)
34 matsphere = simplify(matsphere)
35 print()
36 print("Covariant metric tensor:")
37 print()
38 pprint(matsphere)
39
40 invmatsphere = matsphere.inv('CH')
41 invmatsphere = simplify(invmatsphere)
42 print()
43 print("Contravariant metric tensor:")
44 print()
45 pprint(invmatsphere)
46
47 riemann = metric_to_Riemann_components(metric)
48 riemann = simplify(riemann)
49
50 ricci = metric_to_Ricci_components(metric)
51 ricci = simplify(ricci)
52
53 ch_2nd = metric_to_Christoffel_2nd(metric)
54 ch_2nd = simplify(ch_2nd)
55
56 print()
57 print("Christoffel symbols of 2nd kind:")
58 print()
59 pprint(ch_2nd)
60 print()
61 print("Riemann tensor:")
62 print()
63 pprint(riemann)
64 print()
65 print("Ricci tensor:")
66 print()
67 pprint(ricci)
```