Cvičení z termodynamiky a statistické fyziky

1. Buď' $d\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ libovolná diferenciální forma (Pfaffián). Ukažte, že v případě, že $d\omega$ je úplný diferenciál (existuje funkce $F(x,y)$, tak, že $d\omega = dF$), musí platit

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad\qquad \text{b)} \qquad \oint d\omega = 0,$$

(b) pro každou uzavenou integrační cestu.

2. Buď' $d\omega = (x^2 - y)\,dx + x\,dy$. Je to úplný diferenciál, je $d\omega/x^2$ úplný diferenciál? Vypočtěte integrál $\int d\omega$ mezi body (1,1) a (2,2) podél přímek $(1,1) \to (1,2) \to (2,2)$ a $(1,1) \to (2,1) \to (2,2)$.

3. x, y a z jsou 3 stavové veličiny, spojené stavovou rovnicí $f(x,y,z) = 0$. Ukažte platnost vztahů

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z^{-1}, \qquad\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

a

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$$

přičemž dolný index označuje konstantní veličinu a w je další stavovou veličinou, $w = w(x,y,z)$.

4.

$$\frac{\partial(u,v,\ldots,w)}{\partial(x,y,\ldots,z)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

je Jacobián přechodu proměnných $(x,y,\ldots,z) \to (u,v,\ldots,w)$. Ukažte následující vlastnosti:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y \ldots z} = \frac{\partial(u,y,\ldots,z)}{\partial(x,y,\ldots,z)},$$

$$\frac{\partial(u,v,\ldots,w)}{\partial(x,y,\ldots,z)} = -\frac{\partial(v,u,\ldots,w)}{\partial(x,y,\ldots,z)},$$

$$\frac{\partial(u,v,\ldots,w)}{\partial(x,y,\ldots,z)} = \frac{\partial(u,v,\ldots,w)}{\partial(r,s,\ldots,t)} \cdot \frac{\partial(r,s,\ldots,t)}{\partial(x,y,\ldots,z)},$$

$$\frac{\partial(u,v,\ldots,w)}{\partial(x,y,\ldots,z)} = \left(\frac{\partial(x,y,\ldots,z)}{\partial(u,v,\ldots,w)}\right)^{-1}.$$

5. Při adiabatické expanzi 6 litr Hélia o teplotě 350K klesá tlak ze 40 atm na 1 atm. Vypočtěte výsledný objem a teplotu. Získané výsledky srovnejte s hodnotami, které by vyšly pro izotermickou expanzi ($\kappa = 1,63$).

6. Odvod'te z existence stavová rovnice $f(p, V, T) = 0$ vztah

$$\alpha = p \cdot \beta \cdot \kappa$$

mezi termickém koeficientem roztažnosti $\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, koeficientem izochorické rozpínavosti $\beta := \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ a koeficientem izotermické kompresibility $\kappa := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$.

7. Stavová rovnice má tvar $p = f(V) \cdot T$. Dokažte:

   a) $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$

   b) pokud platí a), pak $\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$.

8. Ukažte relaci $c_p - c_V = R$ (Mayerova relace) mezi izobarickým a izochorickým specifickým teplem jednoho molu ideálního plynu.

9. Ukažte platnost relace $pV^\kappa =$ konst. ($\kappa = c_p/c_V$ je adiabatickým exponentem) v kvasistatickém adiabatickém procesu idealního plynu a odvod'te práci W, kterou vykonává plyn kvasistatickým, adiabatickým přechodem od (p_1, V_1, T_1) do (p_2, V_2, T_2). Pedpokládejte konstantní specifické teplo.

10. Tyč zkroucena momentem síly M o úhel φ. Najděte vztah mezi $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{\text{adiab}}$ a $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{\text{izoterm}}$.

11. Magnetizovatelné válcové těleso je obklopeno cívkou. Ukažte, že při magnetizaci vykonává elektrický proud v cívce práci

$$W = \int_0^M \vec{H} \mathrm{d}\vec{M}$$

v jednotkovém objemu za předpokladu, že intenzita magnetického pole $\vec{H}$ a magnetizace $\vec{M}$ jsou stejné v celém tělese.

12. Při změně magnetizace $\vec{M}$ o $\mathrm{d}\vec{M}$ vykoná systém práci $\mathrm{d}W = -\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{M}$, kde $\vec{H}$ je intenzita magnetického pole. (Jde o práci vykonanou jednotkovým objemem; objem $V =$ konst. $= 1$.) Určete rozdíl tepelných kapacit $c_{\vec{H}} - c_{\vec{M}}$ při konstantním poli $\vec{H}$ a při konstantní magnetizaci.

13. Určete rovnici adiabaty izotropního magnetika.

14. Hustota vnitřní energie u je funkcí jen teploty T, stavová rovnice je $p = \frac{1}{3}\,u(T)$. Určete tvar funkce $u(T)$.

15. Určete entropii Van der Waalsova plynu a vypočtěte:
a) práci van der Waalsova plynu pi vratné izotermické expanzi,
b) změnu teploty van der Waalsova plynu při expanzi do vakua.

16. Ukažte, že termický koeficient roztažnosti

$$\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

splňuje relaci

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\,\alpha$$

z důvodu

$$T\,\mathrm{d}S = c_p\,\mathrm{d}T - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p.$$

17. Ukažte, že specifické teplo pi konstantním tlaku, c_p, a při konstantním objemu, c_V, splňují vztah

$$c_p - c_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T.$$

18. Dvě stejná množství ideálního plynu se stejnou teplotou T a různými tlaky p_1, p_2 jsou od sebe oddělena pepážkou. Určete změnu entropie následkem smíšení obou plynů.

19. Určete maximální práci, kterou lze získat při sloučení stejných množství téhož ideálního plynu se stejnou teplotou T_0 (a různmi objemy popř. tlaky).

20. Vypočtěte účinkový koeficient Carnotova cyklu (1. izotermická expanze, $T_2 =$ konst, 2. adiabatická expanze, $S =$ konst, 3. izotermická komprese, $T_1 =$ konst, 4. adiabatická komprese, $S =$ konst) pro ideální plyn pomocí jeho stavová rovnice.

21. Vypočtěte účinkový koeficient nasledujícího cyklu. Může tento proces být vedený vratně?
1. izotermická expanze $T_2 =$ konst
2. izochorická ochlazení $V_2 =$ konst
3. izotermická komprese $T_1 =$ konst
4. izochorická ohřívání $V_1 =$ konst.

22. Určete účinkový koeficient (idealizovaného) Ottova motoru, který pracuje s ideálním plynem o specifickém teple $c_V = \frac{5}{2}R/\mathrm{mol}$ při kompresním poměru 10:1.
1. adiabatická komprese,
2. izochorická ohřívání (=spálení paliva),
3. adiabatická expanze (vykonání práce),
4. ochlazení (=výfuk horkého plynu, nový, studený plyn je nasátý).

23. Dieselův cykl se skládá těchto částí
    1. adiabatická komprese atmosférického vzduchu,
    2. spálení vstříknuté směsi a izobarická expanze,
    3. adiabatická expanze
    4. a izochorického ochlazení
    Určete účinkový koeficient cyklu v závislosti na kompresním poměru.

24. Volná energie systému $F(V,T) = -\frac{1}{3}\cdot\mathrm{const}\cdot VT^4$. Určete jeho tlak, vnitřní energii, entropii a Gibbsův potenciál.

25. Jouleův-Thompsonův děj (Jouleův-Thompsonův koeficient $\lambda = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$).
    a) Ukažte, že $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$ a $\lambda = \frac{V}{C_p}(1 - T\alpha_p)$.
    $\alpha_p := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ je koeficientem izobarické roztažnosti.
    b) Ukažte, že
    $$\lambda = \frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}{C_p\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$
    c) Ověřte, že $\lambda = 0$ pro klasický ideální plyn.
    d) Ukažte, že pro van der Waalsův plyn platí
    $$\lambda = \frac{bp + \frac{3ab}{V^2} - \frac{2a}{V}}{\left(p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}\right)\cdot C_p}.$$
    e) Vyjádřete rovnici inverzní křivky, který v $p-V$ diagramu představuje rozhraní mezi oblastí $\lambda > 0$ a $\lambda < 0$ pro případ Van der Waalsova plynu.

26. Dokažte, že pro $T \to 0$ neexistuje systém popsatelný $pV = \mathrm{const}\cdot T$.

27. Jaká je celková změna entropie, když smícháme 2 kg vody o teplotě 363 K adiabaticky a při konstantním tlaku s 3 kg vody o teplotě 283 K? ($c_p = 4184\,\mathrm{J/K\,kg}$)

28. Chladnička může za hodinu přeměnit 10 litrů vody o 0°C v led o téže teplotě. K tomu se musí odevzdat skupenské teplo $Q = 800$ kcal ($= 800 \times 1,163$ Wh) do vzduchu (27, 3°C). Jaký nejmenší příkon musí chladnička mít?

29. Uzavřený systém se skládá ze dvou jednoduchých podsystémů, které jsou oddělené pohyblivou stěnou, která umožňuje
    a) jen výměnu tepla,
    b) jak výměnu tepla, tak výměnu hmoty,
    c) ani výměnu tepla, ani výměnu hmoty.
    Jak jsou odpovidající podmínky rovnováhy?

30. a) Částice se může nacházet se stejnou pravděpodobností kdekoliv na obvodu kružnice. Označme ϑ úhel mezi osou z, která leží v rovině kružnice a prochází jejím středem a mezi průvodičem částice. Jaká je pravděpodobností toho, že tento úhel leží mezi hodnotami ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$?

b) Částice se může nacházet kdekoliv na povrchu koule. ϑ je úhel mezi osou z a průvodičem částice. Jaká je pravděpodobnost toho, že tento úhel leží mezi hodnotami ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$?

31. Matematické kyvadlo koná kmity podle zákona $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$. Určete pravděpodobnost toho, že náhodné změření výchylky dá hodnotu mezi φ a $\varphi + \mathrm{d}\varphi$.

32. Najděte fázovou trajektorii jednorozměrného pohybu tělesa hmotnosti m v homogenním gravitačním poli. Ověřte platnost Liouvilleovy věty v tomto případě

33. Najděte fázovou trajektorii a určete časovou změnu fázového objemu $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p$ pro lineární harmonický oscilator s třením úměrným rychlosti.

34. Najděte počet kvantových stavů o energii menší než E pro částici ve dvourozměrné (čtvercové) a v jednorozměrný nádobě o hraně L. Srovnejte získaný výsledek s objemem klasického fázového prostoru. Najděte hustotu stavů $\Gamma(E)$.

35. Vypočtěte objem N-rozměrný koule o poloměru R. K tomu použijte vztahu

$$\int \mathrm{d}^N x\, e^{-\vec{x}^{\,2}} = \int_0^\infty \mathrm{d}R\, \frac{\partial V_N}{\partial R}\, e^{-R^2},$$

kde V_N je objem a $\frac{\partial V_N}{\partial R}$ je plošní obsah povrchu N-rozměrné koule. Všimněte si, že musí platit $V_N \propto R^N$.

36. Ideální plyn tvořený N stejnými bodovými molekulami je uzavřen v nádobě o objemu V. Najděte počet stavů (fázový integrál) $n(E)$, jejichž energie je menší než E a odvoďte z něj stavovou rovnici (molekuly plynu považujte za klasické částice).
Návod: Objem „koule o poloměru R“ v k-rozměrným prostoru je roven

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \cdot R^k.$$

37. Ukažte platnost Stirlingova vzorce pro velké n:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, [1 + O(n^{-1})].$$

Návod: použijte representaci Γ-funkce

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, e^{-x}$$

a rozviňte integrand kolem extremální hodnoty x; všimněte si konvergence tohoto rozvoje při velmi velkém n.

38. Nádoba o objemu V, naplněn plynem, je rozdělen do dvou oblastí pV a qV $(p + q = 1)$. Jaká je pravděpodobnost $W_N(n)$, že se n částic z celkového počtu N nachází v oblasti pV?

Ukažte, že získaná pravděpodobnost je normovaná na jedničku a vypočtěte očekávanou hodnotu veličiny n, střednou kvadratickou odchylku a vyšetřete chování při $N \to \infty$.
Návod: Výsledkem je binomické rozdělení

$$W_N(n) = p^n q^{N-n} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$$

.

39. Najděte střední velikost rychlosti, nejpravděpodobnější velikost rychlosti, střední kinetickou energii a střední kvadratickou odchylku kinetické energie molekul ideálního plynu.

40. Odvoďte barometrickou formuli pro ideální plyn v homogenním gravitačním poli.

41. Vypočtěte fázový objem $\Omega(E, V, N)$ pro energii ideálního plynu od nuly do E. Ukažte, že odtud vyjde stavová rovnice.

42. Magnetický dipol o momentu $\mu = |\vec{\mu}|$ se nachází v konstantním vnějším magnetickém poli, t. z. Hamiltonián je $H = -\vec{\mu}\vec{B}$. Vypočtěte pomocí kanonického rozdělení očekávanou hodnotu magnetického momentu ve směru vnějšího magnetického pole a uvažujte limitu vysokých a nízkých teplot. (Stačí provézt vypočty pro jednu částici, poněvadž platí $Z = z^N$ bez interakce.) Jak vypadají ostatní složky magnetického momentu?

43. Vypočtěte grandkanonickou stavovou sumu pro jednoatomový ideální plyn totožných částic a odvoďte stavovou rovnici pomocí velkého kanonického potenciálu. Co se děje, když částice jsou považovány za rozlišovatelné

44. Ukažte pomocí velkého kanonického rozdělení
a) $\langle \Delta N^2 \rangle = kT \dfrac{\partial N(T, V, \mu)}{\partial \mu}$, kde N je očekávána hodnota počtu částic; vychází odtud $\frac{\Delta N}{N} = O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$?
b) Ukažte, že izotermická kompresibilita musí být kladná

$$\kappa^T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V(p, N, T)}{\partial p}\bigg|_T > 0.$$

Použijte Gibbsovy-Duhemovy relace $N\mathrm{d}\mu = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T$, dosaďte diferenciál $\mathrm{d}p(V, T, N)$, získejte odtud $\frac{\partial N(T,V,\mu)}{\partial \mu}$ a použijte vztahu $p(V/N, T) = p(v, T)$, která vyplíva z toho, že p je intenzivní veličina.

45. Předpokládejte systém N nezávislých, rozlišitelných částic, které se mohou nacházet ve dvou energetických stavech, $\epsilon_1 = 0$ a $\epsilon_2 = \epsilon > 0$. Určete:
a) entropii systému,
b) nejpravděpodobnější hodnoty obsazovacích čísel obou úrovní
c) teplotu jako funkci celkové energie a ukažte, že může být i záporná

d) Jak je průběh specifického tepla systému v závislosti na teplotě
e) Co se děje, když dva takové systémy o různých teplotách si mohou vyměňovat teplo? Jakým směrem teče teplo?
Napověda: Vypočtěte teplotu pro dva podsystémy $N_1 = N_2 = N/2$, $E_1 = \epsilon N/8$, $E_2 = 3\epsilon N/8$ a pro celkový systém v rovnováze. Použijte mikrokanonický soubor.