Poznámky k výpočtu integrálů

Integrování parciálních zlomků
Integrace parciálních zlomků typu $\frac{1}{(x+a)^n}$ je snadná

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \begin{cases} \ln|x+a| & n=1 \\ \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(x+a)^{n-1}} & n>1 \end{cases}.$$

Integrál z parciálních zlomků tvaru $\frac{Ax+B}{(x^2+2bx+c)^n}$, kde $x^2+2bx+c$ nemá reálné kořeny, nejdříve rozložíme na 2 části tak, aby první část měla ve jmenovateli derivaci výrazu $x^2+2bx+c$ a druhá část neměla v čitateli x

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^n}\,\mathrm{d}x + (B-Ab)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2bx+c)^n}.$$

První integrál snadno spočteme

$$\int \frac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln(x^2+2bx+c) & n=1 \\ \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} & n>1 \end{cases}.$$

V druhém integrálu upravíme $x^2+2bx+c$ na čtverec, tj.

$$x^2+2bx+c = (x+b)^2+(c-b^2) = (c-b^2)\left[\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)^2+1\right]$$

a provedeme substituci $t = \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2bx+c)^n} = \frac{1}{(c-b^2)^n}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)^2+1\right]^n} = \frac{\sqrt{c-b^2}}{(c-b^2)^n}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

Označme

$$I_n(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

Pro $n=1$ platí

$$I_1(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t,$$

a pro výpočet integrálů I_n s n vyšším než 1 užijeme rekurentního vzorce

$$I_{n+1}(t) = \frac{2n-1}{2n}I_n(t) + \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n}.$$

Substituce vedoucí na racionální funkce
Označme $r(x)$ racionální funkci v proměnné x a $R(x,y)$ racionální funkci v proměnných x a y.

Integrály z funkcí tvaru $r(\sqrt[n]{x})$

Užijeme substituci

$$x = t^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = nt^{n-1}\,\mathrm{d}t, \quad t = \sqrt[n]{x},$$

která převede integrál na racionální funkci, kterou můžeme integrovat rozkladem na parciální zlomky.

Integrály z funkcí tvaru $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$
Užijeme substituci

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{dt^n - b}{ct^n - a}, \quad \mathrm{d}x = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,\mathrm{d}t, \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

která převede integrál na racionální funkci, kterou můžeme integrovat rozkladem na parciální zlomky.

Integrály z funkcí tvaru $R(x, \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)})$ **kde** $a > 0$
Předpokládejme, že $x_1 < x_2$, pak je odmocnina dobře definována na množině $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ a na této množině můžeme hledat primitivní funkci.

Můžeme užít úpravu

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a(x-x_1)^2\frac{x-x_2}{x-x_1}} = \sqrt{a} \cdot |x-x_1|\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}},$$

čímž převedeme integrovanou funkci na tvar $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ který můžeme integrovat výše popsaným způsobem.

Nebo můžeme užít úpravu

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a(x-x_2)^2\frac{x-x_1}{x-x_2}} = \sqrt{a} \cdot |x-x_2|\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}},$$

čímž převedeme integrovanou funkci na tvar $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ který můžeme integrovat výše popsaným způsobem.

Při odstraňování absolutní hodnoty musíme dát pozor na to, že výraz uvnitř absolutní hodnoty má jiné znaménko na intervalu $(-\infty, x_1]$ a $[x_2, \infty)$.

Integrály z funkcí tvaru $R(x, \sqrt{-a(x-x_1)(x-x_2)})$ **kde** $a > 0$
Předpokládejme, že $x_1 < x_2$, pak je odmocnina dobře definována na množině $[x_1, x_2]$ kde můžeme hledat primitivní funkci.

Můžeme užít úpravu

$$\sqrt{-a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a(x-x_1)^2\frac{x_2-x}{x-x_1}} = \sqrt{a} \cdot (x-x_1)\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}},$$

čímž převedeme integrovanou funkci na tvar $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ který můžeme integrovat výše popsaným způsobem.

Nebo můžeme užít úpravu

$$\sqrt{-a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a(x_2-x)^2\frac{x-x_1}{x_2-x}} = \sqrt{a} \cdot (x_2-x)\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}},$$

čímž převedeme integrovanou funkci na tvar $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ který můžeme integrovat výše popsaným způsobem.

Integrály z funkcí tvaru $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}$ **kde** $a > 0$ **a** $ax^2+2bx+c$ **nemá reálné kořeny**
Užijeme substituci

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t,$$

přičemž znaménko u $\sqrt{a}x$ a t můžeme volit libovolně. Můžeme zvolit například $\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{a}x + t$ a při této volbě pak dostaneme

$$\begin{aligned} ax^2+2bx+c = (\sqrt{a}x+t)^2 = ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \quad \Rightarrow \\ x = \frac{t^2-c}{2(b-\sqrt{a}t)}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-\sqrt{a}t^2+2bt-c\sqrt{a}}{2(b-\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t, \quad t = \sqrt{ax^2+2bx+c}-\sqrt{a}x. \end{aligned}$$

Tato substituce převede integrál na racionální funkci, kterou můžeme integrovat rozkladem na parciální zlomky. Pro jiné volby znamének u $\sqrt{a}x$ a t postupujeme analogicky.

Integrály z funkcí tvaru $R(\sin x, \cos x)$
Tento typ integrálu lze řešit pomocí substituce

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x = 2\arctan t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \\ & \sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ & \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ & \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ & \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Tato substituce převede integrál na racionální funkci, kterou můžeme integrovat rozkladem na parciální zlomky.

V určitých případech lze užít i jiných substitucí, které vedou ke snažšímu výpočtu.
- Pokud má integrovaná funkce tvar $r(\tan x)$ pak lze užít substituci $t = \tan x$.
- Pokud má integrovaná funkce tvar $r(\sin x)\cdot\cos x$ pak lze užít substituci $t = \sin x$.
- Pokud má integrovaná funkce tvar $r(\cos x)\cdot\sin x$ pak lze užít substituci $t = \cos x$.