Domácí úkol č. 1 z F2050

1. Uvažujte čtverec s hranami délky $2a$ ležící v rovině $x-y$ se středem v počátku. Vypočtěte elektrickou intenzitu pro body ležící na ose z. Hrany čtverce jsou nabity konstantní délkovou hustotou náboje τ.

2. Uvažujte plášť koule poloměru R se středem v počátku ležící v polorovině určené podmínkou $z > 0$ (t.j. tvořenou body splňujícími $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \wedge z > 0$). Plášť koule je nabitý plošnou hustotou náboje $\sigma(x, y, z) = \sigma_0 z$. Určete elektrickou intenzitu v počátku.

3. Uvažujte kruh poloměru R ležící v rovině x-y se středem v počátku nabitý plošnou hustotou náboje závislou na souřadnicích podle předpisu $\sigma(x, y, z) = \dfrac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, kde K je konstanta. Určete vektor elektrické intenzity pro body na ose z.

4. Uvažuje kouli poloměru R se středem v počátku nabitou objemovou hustotou náboje závislou na souřadnicích jako $\rho(x, y, z) = Kz$, kde K je konstanta. Určete elektrickou intenzitu v počátku souřadnic.

5. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte elektrickou intenzitu a potenciál pro kouli poloměru R nabitou hustotou náboje závislou na vzdálenosti od středu koule jako $\rho(r) = K(R - r)$, kde K je konstanta a r je vzdálenost od středu koule. (Nezapomeňte že je třeba určit výsledek jak pro body uvnitř tak vně koule.)

6. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte elektrickou intenzitu a potenciál pro nekonečně dlouhý plášť válce poloměru R nabitý konstantní plošnou hustotou náboje σ.

7. Uvažujte kouli s kulovou dutinou vytvořenou materiálem nabitým konstantní objemovou hustotou ρ. Koule má poloměr R_2 a dutina má poloměr R_1 ($R_1 < R_2$). Střed kulové dutiny je totožný se středem koule. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte elektrickou intenzitu a potenciál. Potenciál zvolte tak, aby v nekonečné vzdálenosti od koule byl nulový. (Nezapomeňte že je třeba určit výsledek jak pro body uvnitř dutiny, v prostoru vně dutiny ale uvnitř koule a pro body ležící vně koule.)

8. Uvažuje rozložení náboje popsané objemovou hustotou náboje závislou pouze na souřadnici z podle předpisu $\rho(z) = \dfrac{\rho_0}{1 + (z/a)^2}$, kde ρ_0 a a jsou konstanty. Určete rozložení elektrické intenzity (a elektrického potenciálu).

Výsledky

1.

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = \frac{2\tau a z}{\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}$$

2.

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = -\frac{\sigma_0 R}{6\varepsilon_0}$$

3.

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = \frac{KR}{2\varepsilon_0 z\sqrt{R^2+z^2}}$$

4.

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = -\frac{KR^2}{6\varepsilon_0}$$

5.

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{K}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{Rr}{3} - \dfrac{r^2}{4}\right) & \text{pro } r \le R \\ \dfrac{KR^4}{12\varepsilon_0 r^2} & \text{pro } r \ge R \end{cases}, \quad \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{K}{\varepsilon_0}\left(-\dfrac{Rr^2}{6} + \dfrac{r^3}{12} + \dfrac{R^3}{6}\right) + c & \text{pro } r \le R \\ \dfrac{KR^4}{12\varepsilon_0 r} + c & \text{pro } r \ge R \end{cases},$$

6.

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & \text{pro } r > R \end{cases}, \qquad \phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln R + c & \text{pro } r \le R \\ -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r + c & \text{pro } r \ge R \end{cases},$$

7.

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r \le R_1 \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{r^3 - R_1^3}{r^2} & \text{pro } R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} & \text{pro } R_2 \le r \end{cases}, \quad \phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2} & \text{pro } r \le R_1 \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(-\dfrac{r^2}{2} - \dfrac{R_1^3}{r} + \dfrac{3R_2^2}{2}\right) & \text{pro } R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r} & \text{pro } R_2 \le r \end{cases},$$

8.

$$E_z(z) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\arctan\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \phi(z) = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{z}{a}\arctan\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]\right) + c$$