Křivkový integrál

Křivku v prostoru parametrizujeme pomocí parametru $s \in [a, b]$

$$s \to \vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))\,, \tag{1}$$

infinitesimální délkový element vypočteme jako

$$\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \left(\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s, \tag{2a}$$

$$\mathrm{d}l = |\mathrm{d}\vec{l}| = \sqrt{\left(\tfrac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\tfrac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\tfrac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}\right)^2}\mathrm{d}s, \tag{2b}$$

přičemž lze psát $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{t}\mathrm{d}l$, kde $\vec{t}$ je jednotkový vektor ve směru tečny v daném místě křivky. Křivkový integrál I. druhu vypočteme následovně

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}l = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s))\,\mathrm{d}l \tag{3}$$

přičemž za $\mathrm{d}l$ na pravé straně rovnice musíme dosadit (2b). Křivkový integrál II. druhu vypočteme následovně

$$\int_C \vec{v}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{v}(x(s), y(s), z(s)) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{4}$$

přičemž za $\mathrm{d}\vec{l}$ na pravé straně rovnice musíme dosadit (2a).

Plošný integrál

Plochu v prostoru parametrizujeme pomocí dvou parametrů $(s, t) \in \Sigma$, kde Σ je podmnožina $\mathbb{R}^2$

$$(s, t) \to \vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))\,. \tag{5}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že množina Σ je obdélník $\Sigma = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, což znamená, že parametry mohou nabývat hodnot $s \in (a_1, b_1)$ a $t \in (a_2, b_2)$. Infinitesimální plošný element vypočteme jako

$$\mathrm{d}\vec{S} = \left(\frac{\partial\vec{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial\vec{r}(s, t)}{\partial t}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial y(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \\ \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} & \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} & \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{6a}$$

$$\mathrm{d}S = |\mathrm{d}\vec{S}| = \left|\frac{\partial\vec{r}(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial\vec{r}(s, t)}{\partial t}\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{6b}$$

přičemž lze psát $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor kolmý k ploše v daném bodě. Plošný integrál I. druhu vypočteme následovně

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))\,\mathrm{d}S\,, \tag{7}$$

přičemž za $\mathrm{d}S$ na pravé straně rovnice musíme dosadit (6b). Plošný integrál II. druhu vypočteme následovně

$$\iint_S \vec{v}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \vec{v}(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,, \tag{8}$$

přičemž za $\mathrm{d}\vec{S}$ na pravé straně rovnice musíme dosadit (6a).

Objemový integrál

Těleso v prostoru parametrizujeme pomocí tří parametrů $(s, t, u) \in \Omega$, kde Ω je podmnožina $\mathbb{R}^3$

$$(s, t, u) \to \vec{r}(s, t, u) = (x(s, t, u), x(s, t, u), z(s, t, u)) \,. \tag{9}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že množina Ω je kvádr $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$, což znamená, že parametry mohou nabývat hodnot $s \in (a_1, b_1)$, $t \in (a_2, b_2)$ a $u \in (a_3, b_3)$. K výpočtu objemového integrálu budeme potřebovat Jacobián (determinant Jacobiho matice), který vypočteme následovně

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(s,t,u)}{\partial s} & \frac{\partial x(s,t,u)}{\partial t} & \frac{\partial x(s,t,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(s,t,u)}{\partial s} & \frac{\partial y(s,t,u)}{\partial t} & \frac{\partial y(s,t,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(s,t,u)}{\partial s} & \frac{\partial z(s,t,u)}{\partial t} & \frac{\partial z(s,t,u)}{\partial u} \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Objemový integrál pak vypočteme pomocí vztahu

$$\int_V f(x, y, z) \mathrm{d}V = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x(s, t, u), y(s, t, u), z(s, t, u)) \, |J| \, \mathrm{d}s \mathrm{d}t \mathrm{d}u \,. \tag{11}$$

Gradient, divergence, rotace

Operátor nabla:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{12}$$

Gradient skalárního pole f:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{13}$$

Divergence vektorového pole $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{14}$$

Rotace vektorového pole $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \tag{15}$$

Integrální věty

Gaussova věta

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V, \tag{16}$$

kde plocha S ohraničuje objem V a $\mathrm{d}\vec{S}$ je ve směru vnější normály.

Stokesova věta

$$\oint_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \tag{17}$$

kde křivka C tvoří hranici plochy S, přičemž křivka C je kladně orientovaná křivka.