Poznámky k výpočtu integrálů

Linearita

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Per partes – Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace (na uvažovaném intervalu), pak platí

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Substituce – Nechť funkce $\phi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I_x a funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu I_t takovém, že $\phi(I_x) \subset I_t$, pak platí

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \phi(x) \\ \mathrm{d}t = \phi'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\mathrm{d}t = F(\phi(x)),$$

kde $F(t)$ je primitivní funkce k $f(t)$

Poznámka: Pokud má funkce $\phi(x)$ na uvažovaném intervalu nenulovou derivaci, pak lze užít také

$$\int f(t)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \phi(x) \\ \mathrm{d}t = \phi'(x)\mathrm{d}x \\ x = \phi^{-1}(t) \end{array} \right| = \int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

Newton–Leibnizova formule – nechť $F(x)$ je primitivní funkcí ke spojité funkci $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Základní integrály

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + konst., \quad n \in \mathbb{R}, n \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + konst.$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + konst.$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + konst.$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + konst.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + konst = -\arccos x + konst$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + konst.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + konst.$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + konst.$$