Cvičení 4 - Gaussův zákon v elektrostatice

Jedná se o metodu, která nám umožňuje nalézt intenzitu elektrického pole, popřípadě elektrický potenciál od těles vykazujících určité typy symetrie.

Lze ukázat, že platí

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

kde plošný integrál je počítán přes libovolnou uzavřenou plochu ohraničující určitý objem a Q je celkový náboj uzavřený uvnitř této plochy. Náboj uvnitř objemu ohraničeného danou plochou lze vypočíst pomocí objemového integrálu

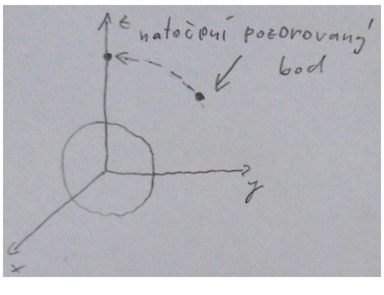
$$Q = \iiint \rho \mathrm{d}V.$$

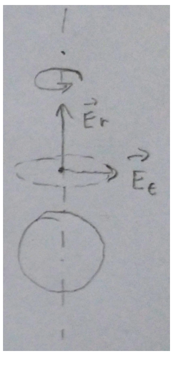
Sférická symetrie

Sférickou symetrii si lze představit tak, že studovaný problém se nezmění, pokud budeme studovaný systém natáčet kolem počátku (nebo jiného vhodně zvoleného bodu). Typickými příklady jsou bodový náboj, homogenně nabitá koule, homogenně nabitá sférická slupka. Dalšími příklady pak může být například soustava soustředných sférických slupek, homogenně nabitá tlustá sférická slupka nebo již zmíněné tělesa nabitá tak, že hustota náboje závisí pouze na vzdálenosti od středu.

Postup pro zjištění intenzity elektrického pole a potenciálu si ukážeme na příkladu koule poloměru R homogenně nabité hustotou náboje ρ (střed koule umístíme do počátku). Jak již bylo zmíněno, sférickou symetrii poznáme tak, že pokud budeme natáčet systém kolem počátku, tak nepoznáme, že se něco změnilo. Můžeme si to představit tak, že těleso (kouli) pozorujeme v různých soustavách, které jsou vůči sobě natočeny, a ve všech soustavách vypadá těleso (koule) stejně. Pokud vypadá těleso stejně v různě natočených soustavách, tak také rozložení elektrického pole od tohoto tělesa musí vypadat stejně ve všech různě natočených soustavách.

Intenzita elektrického pole může v tomto případě záviset pouze na vzdálenosti od středu. Argumentovat můžeme tak, že vždy můžeme natočit soustavu tak, aby pozorovaný bod ležel na ose z, t.j. všechny body v dané vzdálenosti od středu pak skončí v daném bodě na ose z. Protože rozložení elektrické intenzity je invariantní (neměnné) vůči natáčení soustav kolem středu, musíme vždy v tomto bodě dostat tu samou hodnotu. Co se týče směru vektoru elektrické intenzity, tak si můžeme elektrickou intenzitu rozložit na část směřující od středu $\vec{E}_r$ a část kolmou na směr ke středu koule $\vec{E}_t$. Natočíme-li systém podél osy procházející středem a bodem, kde elektrickou intenzitu zjišťujeme, tak se část elektrické intenzity směřující od středu nezmění, zatímco část kolmá na tuto osu se bude měnit. To znamená, že aby rozložení elektrické intenzity nebylo nezávislé na otáčení vůči středu, tak musí být část kolmá na směr od středu nulová.





Dospěli jsme tedy k závěru, že vektor elektrické intenzity musí směřovat od středu koule a jeho velikost může záviset pouze na vzdálenosti od středu.

Dalším krokem je, že užijeme Gaussův zákon, k tomu, abychom určili závislost elektrické intenzity na vzdálenosti od středu. Za tímto účelem si představíme myšlenou plochu tvořenou pláštěm koule poloměru r se středem v počátku. V daném bodě na povrchu této plochy je vektor elektrické intenzity rovnoběžný s normálovým vektorem k této ploše (oba vektory směřují od středu). Plošný integrál z elektrické intenzity přes tuto plochu je tedy

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint E(r)\mathrm{d}S,$$

kde jsme užili toho, že skalární součin dvou vektorů lze zapsat jako velikost prvního vektoru krát velikost druhého vektoru krát kosinus úhlu, který svírají ($E(r)$ značí velikost vektoru elektrické intenzity). Protože velikost elektrické intenzity $E(r)$ závisí pouze na vzdálenosti od středu, která je stejná pro všechny body na ploše přes kterou integrujeme, můžeme člen $E(r)$ vyjmout před integrál

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint E(r)\mathrm{d}S = E(r) \oiint \mathrm{d}S$$

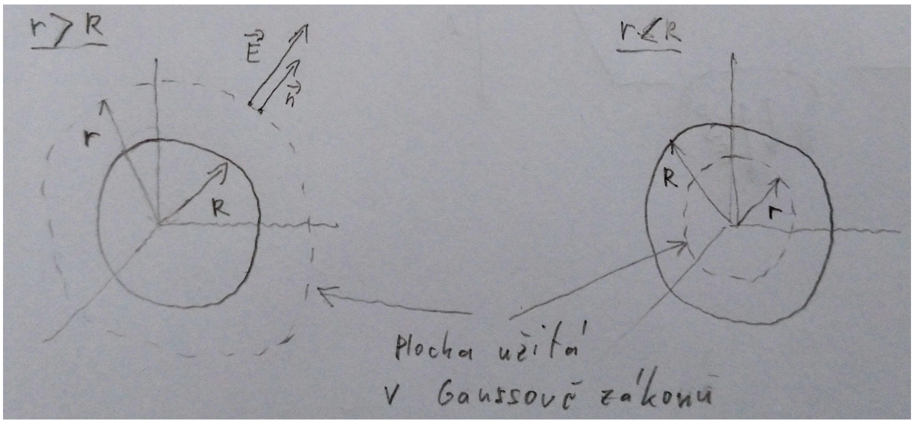
V dalším kroku využijeme toho, zbylý plošný integrál je roven velikosti plochy, přes kterou integrujeme (t.j. plocha pláště koule poloměru r)

$$\oiint \mathrm{d}S = 4\pi r^2$$

Dostaneme tedy pro levou stranu Gaussova zákonu

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Pro určení náboje Q na pravé straně Gaussova zákonu musíme rozlišit dva případy.



Pokud je celá koule uvnitř myšlené plochy užité pro Gaussův zákon, pak leží uvnitř této plochy celý náboj koule, který můžeme vypočíst v případě homogenně nabité kole jako součin jejího objemu a objemové hustoty náboje

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Gaussův zákon tedy vede k rovnici

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Pokud uvnitř myšlené plochy leží pouze část koule, tak musíme vzít v úvahu, náboj Q je pouze část z celkového náboje, která je obsažena uvnitř myšlené plochy (t.j. uvnitř koule poloměru r)

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Gaussův zákon tedy vede k rovnici

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Velikost intenzity elektrického pole je tedy

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r \leq R, \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r \geq R. \end{cases}$$

Při určení potenciálu elektrického pole můžeme vyjít z určené intenzity. Víme, že musí platit $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$. Vzhledem k symetrii problému lze očekávat, že potenciál bude záviset pouze na vzdálenosti r od středu, t.j. $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$. Při výpočtu gradientu využijeme toho, že závislost potenciálu na x, y a z je dána funkcí složenou z funkce $\phi(r)$ závisející na r a funkce $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Například paciální derivace vzhledem k x je pak dána

$$\frac{\partial\phi(r(x,y,z)))}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Stejným způsobem můžeme dopočíst i derivace podle y a z potřebné k vyjádření gradientu

$$\nabla\phi(r) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Uvědomíme-li si, že $\vec{r}/r$ je jednotkový vektor směřující od středu – t.j. jednotkový vektor ve stejném směru jako vektor elektrické intenzity, můžeme zapsat vztah mezi potenciálem a velikostí elektrické intenzity jako

$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r.$$

V oblasti vně koule ($r \geq R$) dostaneme

$$\phi_{r\geq R}(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1,$$

zatímco v oblasti uvnitř koule ($r \leq R$) dostaneme

$$\phi_{r\leq R}(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_2.$$

Jak jste si mohli všimnout, výsledky obsahují dvě integrační konstanty C_1 a C_2. Tyto konstanty nejsou nezávislé, neboť potenciál musí být spojitou funkcí. Pro hodnotu $r = R$, kdy lze potenciál vyjádřit oběma z rovnic tedy musí platit

$$\phi_{r\leq R}(R) = \phi_{r\geq R}(R) \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_2 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} + C_1.$$

Potenciál elektrického pole je tedy dán jako

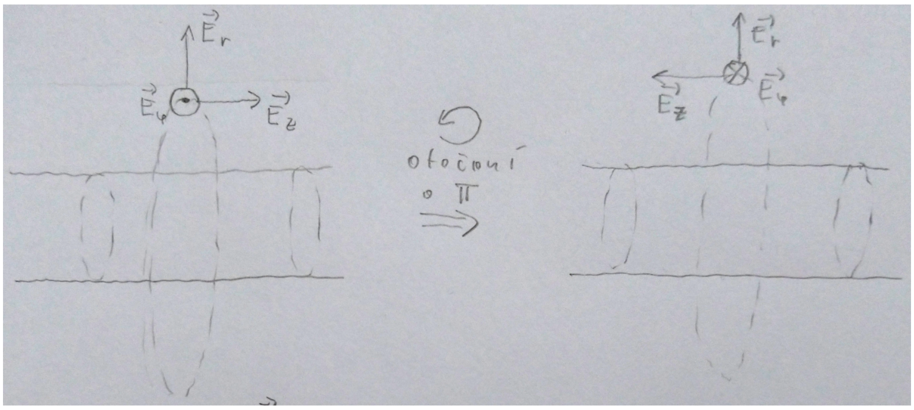
$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} + C_1 & r \leq R, \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0 r} + C_1 & r \geq R. \end{cases}$$

Válcová symetrie

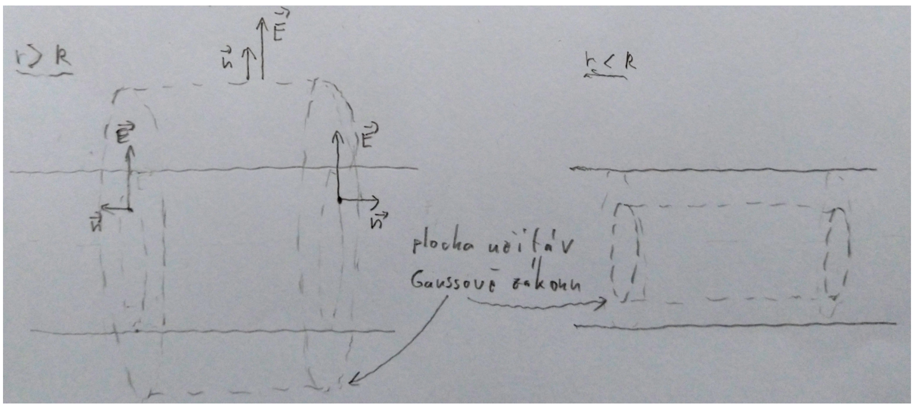
Válcová symetrie se vyznačuje tím, že existuje osa podél níž se můžeme posunovat a kolem níž se můžeme otáčet bez toho, abychom pozorovali jakoukoliv změnu. Tato symetrie se uplatní při hledání elektrického pole (a potenciálu) od přímky, nekonečně dlouhého válce, nebo nekonečně dlouhého pláště válce, pokud je zároveň splněna podmínka, že hustota náboje závisí pouze na vzdálenosti od osy.

Jako příklad si spočteme elektrickou intenzitu a potenciál od nekonečně dlouhého válce poloměru R nabitého hustotou náboje závislou na vzdálenosti od osy válce jako $\rho(r) = Kr$, kde K je konstanta a r je vzdálenost od osy.

Podobným způsobem jako v případě sférické symetrie můžeme dojít k závěru, že elektrická intenzita nemůže záviset na poloze podél osy válce (souřadnice z ve válcových souřadnicích), a na poloze kolem osy (úhel ϕ ve válcových souřadnicích). Jediné na čem může záviset je vzdálenost od osy válce, kterou budeme značit r. Co se týče směru vektoru elektrické intenzity, tak tento vektor si můžeme rozložit na tři části – část $\vec{E}_r$, která směřuje směrem od osy, část $\vec{E}_z$, která směřuje podél osy a část $\vec{E}_\phi$, která je tečná ke kružnici obíhající osu. Nyní si můžeme představit, že provedeme otočení o úhel π kolem osy kolmé na osu válce. V porovnání s neotočeným systémem se nám změní směr vektorů $\vec{E}_z$ a $\vec{E}_\phi$, zatímco vektor $\vec{E}_r$ zůstane nezměněn. Protože zkoumaný systém je totožný před i po provedení otočení, vektor elektrické intenzity by měl zůstat nezměněn. Tuto podmínku je možné splnit pouze pokud budou vektory $\vec{E}_z$ a $\vec{E}_\phi$ nulové. Došli jsme tedy k závěru, že vektor elektrické intenzity musí směřovat směrem od osy válce a jeho velikost může záviset pouze na vzdálenosti od osy.



Pro užití Gaussova zákonu budeme uvažovat plochu obklopující válec poloměru r a délky l.



Plošný integrál na levé straně Gaussova zákona můžeme rozdělit na tři části

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{plášť válce}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{1. podstava}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{2. podstava}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Jelikož normálové vektory k podstavám válce jsou kolmé ne vektory elektrické intenzity, budou díky skalárnímu součinu (skalární součin vzájemně kolmých vektorů je nula) výsledky druhého a třetího příspěvku rovny nule. Jediný nenulový příspěvek bude od pláště válce. Užitím toho, že normálový vektor k plášti válce je ve všech bodech rovnoběžný s vektorem elektrické intenzity, že velikost elektrické intenzity závisí pouze na vzdálenosti od osy, která je stejná pro všechny body pláště válce a vzorce pro plochu pláště válce dostaneme

$$\oint\!\!\!\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{plášť válce}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{plášť válce}} E(r)\mathrm{d}S = E(r) \iint_{\text{plášť válce}} \mathrm{d}S = 2\pi r l E(r).$$

V případě, že $r \geq R$ je náboj uvnitř myšlené plochy dán nábojem uvnitř části válce délky l a poloměru R. Vzhledem k tomu, že hustota náboje není konstantní, musíme vypočíst náboj Q pomocí objemového integrálu z hustoty objemového náboje

$$Q = \iiint \rho(\vec{r'})\mathrm{d}V' = \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^R Kr' \cdot r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}z'\mathrm{d}\phi' = K\frac{2\pi R^3 l}{3},$$

kde jsme využili parametrizace ve válcových souřadnicích ($\mathrm{d}V' = r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}z'\mathrm{d}\phi'$). Čárkované souřadnice jsme užili proto, aby nemohlo dojít záměně integrační proměnné r' s parametrem r, kterým značíme poloměr pláště válce u myšlené plochy v Gaussově zákonu. Z Gaussova zákona tedy dostaneme

$$2\pi r l E(r) = K\frac{2\pi R^3 l}{3\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{KR^3}{3\varepsilon_0 r}$$

V případě, že $r \leq R$ tak musíme vzít v úvahu, náboj Q je pouze část z celkového náboje, která je obsažena uvnitř myšlené plochy

$$Q = \iiint \rho(\vec{r'})\mathrm{d}V' = \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^r Kr' \cdot r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}z'\mathrm{d}\phi' = K\frac{2\pi r^3 l}{3},$$

Z Gaussova zákona tedy dostaneme

$$2\pi r l E(r) = K\frac{2\pi r^3 l}{3\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{Kr^2}{3\varepsilon_0}$$

Podobným způsobem jako v případě sférické symetrie lze ukázat, že elektrický potenciál musí být funkcí pouze vzdálenosti od osy a že platí

$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r,$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ je vzdálenost od osy. V oblasti vně a uvnitř válce pak můžeme vypočíst potenciál jako

$$\phi_{r \geq R}(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{KR^3}{3\varepsilon_0}\ln r + C_1,$$

zatímco v oblasti uvnitř koule ($r \leq R$) dostaneme

$$\phi_{r \leq R}(r) = -\int E(r)\mathrm{d}r = -\frac{Kr^3}{9\varepsilon_0} + C_2.$$

Z podmínky, že potenciál je spojitý pro $r = R$ pak můžeme vyjádřit jednu z integračních konstant

$$\phi_{r \leq R}(R) = \phi_{r \geq R}(R) \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{KR^3}{9\varepsilon_0} - \frac{KR^3}{3\varepsilon_0}\ln R + C_1.$$

Velikost elektrické intenzity a potenciálu je tedy dána jako

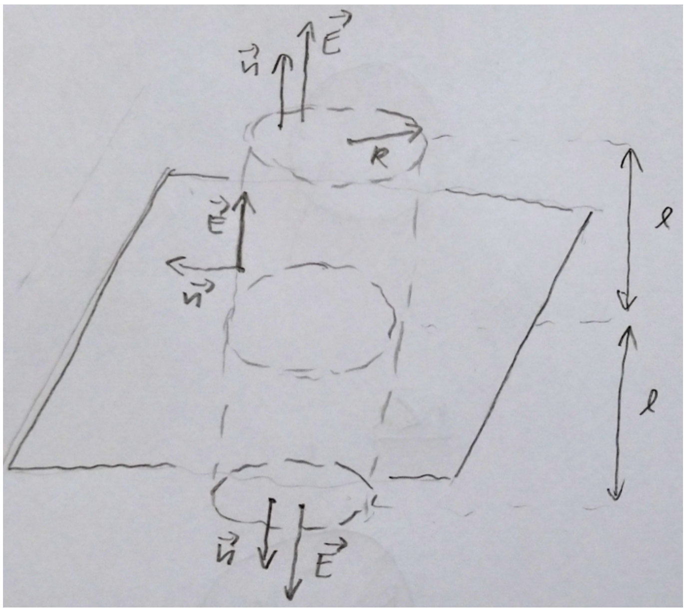
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Kr^2}{3\varepsilon_0} & r \leq R, \\ \dfrac{KR^3}{3\varepsilon_0 r} & r \geq R. \end{cases} \qquad \phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{KR^3}{3\varepsilon_0}\ln r + C_1 & r \leq R, \\ -\dfrac{Kr^3}{9\varepsilon_0} + \dfrac{KR^3}{9\varepsilon_0} - \dfrac{KR^3}{3\varepsilon_0}\ln R + C_1 & r \geq R. \end{cases}$$

Rovinná symetrie

Rovinná symetrie znamená, že existuje rovina podél níž se lze posouvat bez toho, abychom pozorovali jakoukoliv změnu. Rovněž lze bez pozorování jakýkoliv změn provádět otáčení kolem osy kolmé na tuto rovinu. V tomto případě lze ukázat, že vektor elektrické intenzity je kolmý na tuto plochu a jeho velikost závisí pouze na souřadnici ve směru kolmém k této ploše (kterou budeme značit z).

Typickým příkladem, který užijeme jako příklad, kdy se tato symetrie se uplatní, je hledání elektrické intenzity a potenciálu od nekonečně velké rovné desky nabité konstantním plošným nábojem σ. V tomto případě rovněž můžeme užít toho, že nebudeme pozorovat žádnou změnu, když desku převrátíme. Uvažujme elektrickou intenzitu ve dvou bodech stejně vzdálených od desky, ale ležících naproti sobě na opačných stranách desky. Po překlopení desky dojde k záměně těchto bodů a zároveň k otočení směrů elektrické intenzity. Protože překlopení nemůže změnit rozložení intenzity elektrického pole, musí mít elektrické intenzity v obou uvažovaných bodech stejnou velikost a opačný směr.

Jako myšlenou plochu zvolíme povrch válce poloměru R a výšky $2l$ umístěný tak, že jeho osa je kolmá na nabitou desku a střed válce leží na této ploše, t.j. stejná část válce je v prostoru nad deskou a pod deskou.



Plošný integrál na levé straně Gaussova zákona můžeme rozdělit na tři části

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{plášť válce}} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{podstava nahoře}} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{podstava dole}} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{S}$$

Protože normálový vektor k plášti válce je vždy kolmý ke směru elektrické intenzity, nedostaneme žádný příspěvek od integrálu přes plášť válce. Protože horní a spodní podstava mají stejnou vzdálenost od desky, musí mít elektrická intenzita na těchto podstavách stejnou velikost (ale opačný směr). Vezmeme-li v úvahu, že normály k podstavám jsou rovnoběžné s vektory elektrické intenzity, můžeme psát

$$\begin{aligned}\oiint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iint_{\text{podstava nahoře}} \vec{E}(l) \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{podstava dole}} \vec{E}(l) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \vec{E}(l) \iint_{\text{podstava nahoře}} \mathrm{d}S + \vec{E}(l) \iint_{\text{podstava dole}} \mathrm{d}S = 2\pi R^2 E(l),\end{aligned}$$

kde $E(l)$ značí velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti l od desky.

Náboj uvnitř myšlené plochy je dán nábojem plochy nesené kruhem vytyčeným průnikem válcem s nabitou plochou, t.j.

$$Q = \pi R^2 \sigma.$$

Z Gaussova zákona tedy dostáváme

$$2\pi R^2 E(l) = \frac{\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(l) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Uvážíme-li, že v prostoru nad deskou směřuje elektrická intenzita nahoru a v prostoru pod deskou dolu, můžeme z-tovou složku elektrické intenzitu vyjádřit jako

$$E_z(z) = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & z \geq 0, \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & z \leq 0. \end{cases}$$

Ze symetrie plyne, že potenciál může záviset pouze na souřadnici z. Ze vztahu mezi elektrickou intenzitou a potenciálem pak plyne

$$E_z(z) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(z) = -\int E(z)\mathrm{d}z.$$

Integrací elektrické intenzity a volbou integračních konstant tak, aby byl potenciál spojitý pak dostáváme výsledek

$$\phi(z) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + C & z \geq 0, \\ +\dfrac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + C & z \leq 0. \end{cases}$$

S užitím absolutní hodnoty pak můžeme elektrickou intenzitu a potenciál zapsat jako

$$E_z(z) = \frac{z}{|z|}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad \phi(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_0} + C.$$