Cvičení 6 - Dielektrika

Polarizaci dielektrika popisujeme pomocí vektorového pole $\vec{P}$. V Gaussově zákonu pak kromě objemové hustoty náboje ρ odpovídající generujícím nábojům uvažujeme rovněž objemovou hustotu náboje ρ_{pol} vzniklou v důsledku polarizace dielektrika. Lze ukázat, že tuto hustotu náboje lze vyjádřit pomocí vektoru polarizace jako

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla\vec{P}.$$

Zapíšeme-li Gaussův zákon zahrnující obě zmíněné hustoty náboje a využijeme vyjádření ρ_{pol} pomocí $\vec{P}$, tak dostaneme

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\vec{P}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho.$$

Výraz uvnitř závorky definuje nové vektorové pole $\vec{D}$ nazývané elektrická indukce

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

S pomocí tohoto vektorového pole lze zapsat Gaussův zákon velmi kompaktním způsobem

$$\nabla\vec{D} = \rho.$$

V integrálním tvaru pak dostaneme Gaussův zákon daný následovně

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q,$$

kde Q reprezentuje velikost generujícího náboje ohraničeného plochou S.

Kromě Gaussova zákona budeme ještě potřebovat Faradayův zákon

$$\nabla \times \vec{E} = 0,$$

nebo v integrálním tvaru

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

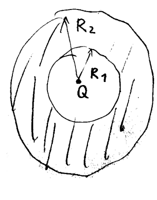
V mnoha případech lze předpokládat, že vektor elektrické indukce je lineárně úměrný elektrické intenzitě

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E},$$

kde konstanta ε_r se nazývá relativní permitivita.

Gaussův zákon pro dielektrika

Uvažujme kouli z dielektrika s relativní permitivitou ε_r poloměru R_2 s kulovou dutinou poloměru R_1. Ve středu kulové dutiny, která splývá se středem koule, je umístěn bodový náboj velikosti Q. Naším úkolem je určit rozložení elektrické intenzity, elektrické indukce a polarizace.



Nejdříve určíme elektrickou indukci. Ze symetrie problému víme, že elektrická indukce musí všude směřovat od středu a její velikost bude záviset pouze na vzdálenosti od středu, kterou budeme značit symbolem r. Pro Gaussův zákon budeme uvažovat myšlenou plochu tvořenou povrchem koule poloměru r (a středem ve stejném bodě jako je střed koule a dutiny). Z Gaussova zákona dostaneme

$$4\pi r^2 D(r) = Q,$$

kde jsme využili toho, že vektor elektrické indukce je vždy rovnoběžný s normálovým vektorem k ploše a velikost elektrické indukce závisí pouze na r. Poznamenejme, že ať je poloměr r jakýkoliv, myšlená plocha vždy obklopuje bodový náboj Q. Velikost elektrické indukce je tedy (nezávisle na tom, zda se bod, ve kterém ji určujeme, nachází uvnitř nebo vně dielektrika)

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Vztah mezi elektrickou indukcí a elektrickou intenzitou bude jiný, budeme-li uvnitř nebo vně dielektrika. Pro $r < R_1$ (mimo dielektrikum, kde předpokládáme vakuum) platí

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Pro $R_1 < r < R_2$ (v dielektriku) platí

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}.$$

Pro $R_2 < r$ (mimo dielektrikum, kde předpokládáme vakuum) platí

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Velikost vektoru polarizace můžeme určit ze vztahu mezi vektorem elektrické indukce, elektrické intenzity a vektorem polarizace

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \Rightarrow \quad P(r) = D(r) - \varepsilon_0 E(r)$$

Elektrická intenzita a polarizace jsou tedy dány vztahem

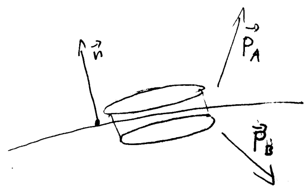
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r < R_1, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} & R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_2 < r, \end{cases} \qquad P(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1, \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right) & R_1 < r < R_2, \\ 0 & R_2 < r. \end{cases}$$

Objemovou hustotu polarizačního náboje lze vypočíst vztahem

$$\rho_{\mathrm{pol}} = -\nabla \vec{P}$$

V oblastech $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ a $R_2 < r$ je objemová hustota polarizačního náboje rovna nule, jak lze snadno ověřit dosazením do tohoto vztahu. Na površích dielektrika, tj. pro poloměry R_1 a R_2 se však nachází indukovaný náboj, který můžeme popsat pomocí plošné hustoty náboje.

Představme-si rozhraní mezi dvěma dielektriky s relativními permitivitami ε_{rA} a ε_{rB} (tento případ zahrnuje i to, když je některé z prostředí vakuum, které má relativní permitivitu rovnu jedné). Nyní si představme myšlenou plochu tvaru povrchu válce zanedbatelné výšky, která je umístěna tak, že jedna z podstav se nachází v prvním prostředí a druhá postava se nachází v druhém prostředí.



Ze vztahu mezi ρ_{pol} a $\vec{P}$ dostaneme s užitím Gaussovy věty (která nám umožní převést objemový integrál na plošný integrál)

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla\vec{P} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{pol}} = \iiint_V \rho_{\text{pol}} \mathrm{d}V = -\iiint_V \nabla\vec{P} \mathrm{d}V = -\oint\!\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Budeme-li předpokládat, že poloměr R podstav je tak malý, že vektor elektrické polarizace a plošnou hustotu náboje na rozhraní lze považovat v oblasti válce z konstantní, pak z výše uvedeného vztahu dostaneme pro výše popsanou plochu

$$Q_{\text{pol}} = \pi R^2\sigma_{\text{pol}} = -\oint\!\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\pi R^2 \vec{n}\cdot\vec{P}_A + \pi R^2\vec{n}\cdot\vec{P}_B \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{pol}} = -\vec{n}\cdot\vec{P}_A + \vec{n}\cdot\vec{P},$$

kde náboj Q_{pol} jsme vypočetli z plošné hustoty náboje a velkosti plochy rozhraní uzavřené uvnitř válce. Všimněte si, že z plošného integrálu jsme dostali pouze příspěvky odpovídající podstavám válce, příspěvek odpovídající plášti válce jsme mohli zanedbat, protože předpokládáme, že válec má zanedbatelnou výšku.

Pomocí tohoto vztahu můžeme vypočíst velikost plošných nábojů na povrchu dielektrika (t.j. rozhraní mezi vakuem a dielektrikem)

$$\begin{aligned}
\sigma_{R_1} &= -P_{R_1<r<R_2}(R_1) + P_{r<R_1}(R_1) = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right),\\
\sigma_{R_2} &= -P_{R_2<r}(R_2) + P_{R_1<r<R_2}(R_2) = \frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right).
\end{aligned}$$

Nyní provedeme výpočet elektrické intenzity s užitím bez užití vektoru elektrické indukce. K tomu užijeme Gaussova zákona ve tvaru kdy náboj na pravé straně zahrnuje jak generující tak polarizační náboje

$$\oint\!\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q+Q_{\text{pol}}}{\varepsilon_0}.$$

Pro $r < R_1$ je myšlenou plochou obklopen pouze bodový náboj Q

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Pro $R_1 < r < R_2$ je myšlenou plochou obklopen jak bodový náboj Q tak plošný náboj σ_{R_1} rozprostřený po vnitřní ploše dielektrika

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + 4\pi R_1^2\sigma_{R_1}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}.$$

Pro $R_2 < r$ je myšlenou plochou obklopen jak bodový náboj Q tak plošné náboje σ_{R_1} a σ_{R_2} rozprostřené po vnitřní a vnější ploše dielektrika

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + 4\pi R_1^2\sigma_{R_1} + 4\pi R_2^2\sigma_{R_2}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Kondenzátor s dielektrikem

Naším úkolem bude určit kapacitu kondenzátoru s elektrodami tvořeným soustřednými kulovými slupkami s poloměry R_1 a R_2. Prostor mezi elektrodami je vyplněn dielektrikem, jehož relativní permitivita závisí na vzdálenosti od středu podle předpisu $\varepsilon_r(r) = Kr$.

Pro výpočet předpokládejme, že vnitřní elektroda je nabitá nábojem $+Q$ a vnější nábojem $-Q$. Z Gaussova zákona můžeme vypočíst velikost elektrické indukce v prostoru mezi elektrodami, kde vzdálenost od středů elektrod splňuje podmínku $R_1 < r < R_2$

$$4\pi r^2 D(r) = Q \quad \Rightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Z velikosti elektrické indukce pak můžeme spočíst velikost elektrické intenzity

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(r) \vec{E} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(r)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K r^3}$$

V případě sférické symetrie platí mezi elektrickou intenzitou a potenciálem vztah $E(r) = -\phi'(r)$, kde čárka značí derivaci podle r. Napětí mezi elektrodami tudíž můžeme vypočíst následovně

$$U = \phi(R_1) - \phi(R_2) = -\left[\phi(r)\right]_{r=R_1}^{R_2} = -\int_{R_1}^{R_2} \phi'(r) \mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \mathrm{d}r = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 K}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right),$$

kde jsme využili toho, že $\phi(r)$ je primitivní funkce k $\phi'(r)$. Kapacita kondenzátoru je tudíž rovna

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{8\pi\varepsilon_0 K}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}}.$$

Kapacitu uvažovaného kondenzátoru můžeme vypočíst i jiným způsobem. Prostor mezi elektrodami si můžeme rozdělit na tenké kulové slupky velmi malé tloušťky. Každou kulovou slupku si pak představíme jako samostatný kondenzátor. Z uspořádání slupek je zřejmé, že původní kondenzátor dostaneme tak, že tyto kondenzátory seřadíme do série, t.j. musí platit

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots,$$

kde $C_1, C_2, \ldots$ jsou kapacity kondenzátorů tvořenými jednotlivými slupkami. V případě, že jsou slupky velmi tenké, tak můžeme zanedbat křivost elektrod a vypočíst kapacitu těchto kondenzátorů jako kdyby se jednalo o deskové kondenzátory

$$C_k = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{l},$$

kde S je plocha elektrod, l jejich vzdálenost a ε_r je relativní permitivita dielektrika. Rozdělíme-li interval od R_1 do R_2 na nekonečný počet infinitesimálně dlouhých úseků, t.j. provedeme rozdělení na infinitesimálně tlusté slupky, pak ve vztahu pro kapacitu kondenzátoru musíme ze sumy udělat integrál

$$\frac{1}{C} = \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{C}\right),$$

kde s využitím vztahu pro deskový kondenzátor můžeme zapsat příspěvek od jedné infinitesimálně tlusté slupky jako

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{C}\right) = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r(r) 4\pi r^2}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r(r)},$$

kde jsme za plochu desek dosadili plochu povrchu koule $4\pi r^2$ a za vzdálenost desek $\mathrm{d}r$. Poznamenejme, že při dosazování za relativní permitivitu nesmíme zapomenout na to že se jedná o funkci vzdálenosti od středu. Dostaneme tedy

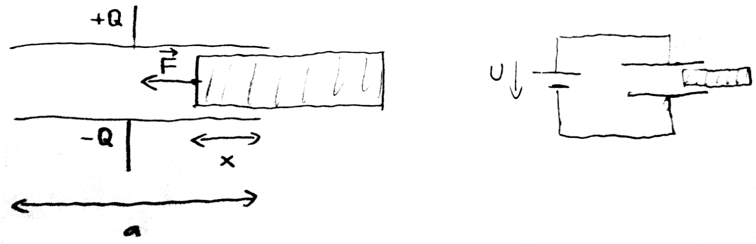
$$\frac{1}{C} = \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{C}\right) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r(r)} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 K r^3} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 K}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right),$$

Odtud dostaneme

$$C = \frac{8\pi\varepsilon_0 K}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}}.$$

Vtahování dielektrika do kondenzátoru

Uvažujme deskový kondenzátor s elektrodami tvaru čtverce s hranami délky a vzdáleností elektrod L. Vzdálenost elektrod je mnohem menší než rozměry elektrod. Do prostoru mezi elektrody lze zasouvat desku z dielektrika, která má stejnou tloušťku jako je mezera mezi elektrodami. Naším úkolem bude zjistit sílu, kterou je tato deska vtahována do prostoru mezi elektrody, pokud je napětí na kondenzátoru rovno U.



Předvedeme si dvě metody jak se dostat k tomuto výsledku.

Kondenzátor si můžeme rozdělit na dvě části, část ke není zastrčené dielektrikum a část do které je zastrčené dielektrikum. Každou část si můžeme představit jako samostatný kondenzátor, a kapacitu kondenzátoru zahrnující obě části pak spočíst jako paralelní spojení těchto dvou kondenzátorů.

$$C_{\text{bez dielektrika}} = \frac{\varepsilon_0 (a-x)a}{L}, \qquad C_{\text{s dielektrikem}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x a}{L},$$

$$C(x) = C_{\text{bez dielektrika}} + C_{\text{s dielektrikem}} = \frac{\varepsilon_0 a (a + (\varepsilon_r - 1)x)}{L}.$$

První metoda využije principu virtuální práce a bude předpokládat, že náboj na deskách je konstantní. Dojde-li k zasunutí desky z dielektrika o infinitesimální vzdálenost $\mathrm{d}x$, vykonáme na systému práci $-F\mathrm{d}x$, kde F je velikost síly, kterou je deska vtahována mezi elektrody (působící ve směru zasouvání desky). Vnitřní energie se musí zvýšit o vykonanou práci

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = -F\mathrm{d}x.$$

Energie kondenzátoru kapacity $C(x)$ nabitého nábojem Q je dána vztahem

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C(x)}.$$

Jelikož předpokládáme, že náboj na deskách zůstává během procesu zasouvání desky neměnný, může se energie kondenzátoru měnit jen díky závislosti kapacity na zasunutí x desky z dielektrika. Změnu energie při zasunutí o $\mathrm{d}x$ můžeme vypočíst pomocí derivace vzhledem k x

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\frac{Q^2}{2C^2(x)}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)a}{L}.$$

Dosazením do rovnice pro změnu vnitřní energie dostaneme

$$-\frac{Q^2}{2C^2(x)}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -F\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Q^2}{2C^2(x)}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}.$$

Jelikož náboj kondenzátoru lze zapsat jako $Q = C(x)U$, lze tento výsledek zapsat také jako

$$F = \frac{U^2}{2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)a}{L}.$$

Poznamenejme, že dosazení za Q jsme museli provést až poté co jsme provedli derivaci energie podle x.

Druhá metoda rovněž využije principu virtuální práce, nyní však budeme předpokládat, že napětí na deskách je konstantní. Dojde-li k zasunutí desky z dielektrika o infinitesimální vzdálenost $\mathrm{d}x$, vykonáme na systému mechanickou práci $-F\mathrm{d}x$, rovněž však při tomto procesu dojde k výměně náboje mezi zdrojem a kondenzátorem. Aby zůstalo napětí na kondenzátoru konstantní, musí se náboj na deskách zvýšit o $\mathrm{d}Q$. Můžeme si to představit tak, že ze záporné elektrody odebereme náboj velikosti $\mathrm{d}Q$, takže se náboj na této elektrodě změní z $-Q$ na $-Q-\mathrm{d}Q$, a tento náboj přesuneme ke kladné elektrodě, takže náboj kladné elektrody se zvýší z Q na $Q+\mathrm{d}Q$. Při tomto procesu musíme náboj $\mathrm{d}Q$ přesunout přes potenciálový rozdíl rovný velikosti napětí na kondenzátoru, musíme tedy vykonat práci $U\mathrm{d}Q$. Pro změnu vnitřní energie tedy platí

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = -F\mathrm{d}x + U\mathrm{d}Q.$$

Energie a náboj kondenzátoru kapacity $C(x)$ nabitého na napětí U jsou dány vztahy

$$\mathcal{E} = \frac{C(x)U^2}{2}, \qquad\qquad Q = C(x)U.$$

Změnu energie a náboje při zasunutí o $\mathrm{d}x$ můžeme vypočíst pomocí derivace vzhledem k x

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{U^2}{2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \qquad\qquad \mathrm{d}Q = U\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Jelikož předpokládáme, že napětí na deskách zůstává během procesu zasouvání desky konstantní, při derivaci $\mathcal{E}$ a Q jsme U považovali za konstantu. Dosazením do rovnice pro změnu vnitřní energie dostaneme

$$\frac{U^2}{2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -F\mathrm{d}x + U^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad F = \frac{U^2}{2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$$

Nemělo by být překvapivé, že jsme došli ke stejnému výsledku jako v případě první metody.

Náboj pohřbený v dielektriku

Představme si rozhraní mezi dvěma dielektriky. Na rozhraní si můžeme představit myšlenou plochu tvaru povrchu válce zanedbatelné výšky, která je umístěna tak, že jedna z podstav se nachází v prvním dielektriku a druhá v druhém dielektriku. Poloměr válce můžeme zvolit tak malý, že změna vektorů elektrické indukce v prvním a druhém mediu bude tak malá, že tyto vektory budeme moci považovat v této oblasti za konstantní. Nebudeme-li uvažovat na rozhraní žádné generující náboje (ne rozhraní budou polarizační náboje, ale vliv těchto nábojů je již zahrnut do pole elektrické indukce), pak z Gaussova zákona dostaneme

$$\oiint \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{1.\text{podstava}} \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{2.\text{podstava}} \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{plášť}} \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \pi R^2 \vec{n}\cdot\vec{D}_A - \pi R^2 \vec{n}\cdot\vec{D}_B = 0.$$

přičemž příspěvek od pláště jsme mohli zanedbali protože předpokládáme, že válec má zanedbatelnou výšku. Dostáváme tedy podmínku

$$\vec{n}\cdot\vec{D}_A = \vec{n}\cdot\vec{D}_B,$$

která říká, že část vektoru elektrické indukce kolmá k rozhraní se zachovává.

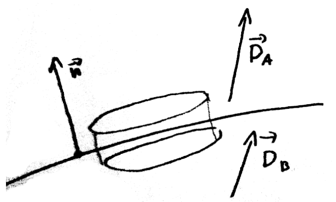
Podobným způsobem si můžeme u rozhraní představit křivku tvaru obdélníku umístěnou tak, že horní hrana leží v prvním dielektriku a spodní hrana ve spodním dielektriku. Zvolíme-li navíc boční strany obdélníku tak malé, že jejich příspěvky do křivkového integrálu budeme moci zanedbat, pak z Faradayova zákona dostaneme

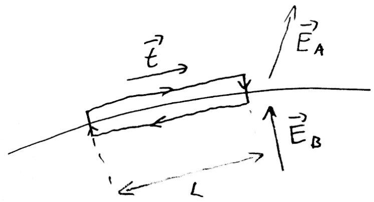
$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\text{horní hrana}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_{\text{dolní hrana}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = L\vec{t}\cdot\vec{E}_A - L\vec{t}\cdot\vec{E}_B = 0$$

kde $\vec{t}$ je vektor jednotkové velikosti směřující podél spodní a horní hrany obdélníku a L je délka těchto hran. Z umístění obdélníku u rozhraní je zřejmé, že $\vec{t}$ je vektor tečný k rozhraní. Získaná podmínka

$$\vec{t} \cdot \vec{E}_A = \vec{t} \cdot \vec{E}_B$$

tedy říká, že část vektoru elektrické intenzity tečná k rozhraní se na rozhraní mezi dielektriky zachovává.





Předpokládejme, že v poloprostor $z < 0$ je vyplněn dielektrikem s relativní permitivitou ε_r, zatímco poloprostor $z > 0$ je prázdný (vakuum). Uvnitř dielektrika je ve vzdálenosti L umístěn bodový náboj velikosti Q. Naším úkolem bude určit rozložení elektrické indukce a intenzity v tomto systému.

Budeme postupovat tak, že využijeme metodu zrcadlových nábojů a elektrickou indukci a intenzitu si vyjádříme zvlášť pro poloprostor $z < 0$ a $z > 0$. Takto zapsané výsledky budou záviset na velikostech (zatím neznámých) zrcadlových nábojů. V dalším kroku pak určíme velikosti těchto nábojů tak, aby byly pro elektrickou intenzitu a indukci splněny podmínky na rozhraní.

Pro určení elektrického pole v oblasti $z < 0$ si představme, že celý prostor je vyplněn dielektrikem s relativní permitivitou ε_r. Náboj Q je umístěn v bodě $(0, 0, -L)$. Kromě tohoto náboje budeme uvažovat další náboj velikosti Q' umístěný zrcadlově vůči tomuto náboji vzhledem k rovině x-y, t.j. v bodě $(0, 0, L)$. Vektory elektrické indukce a intenzity je pak možné vyjádřit pomocí superpozice příspěvků od jednotlivých bodových nábojů

$$\vec{D}_A(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi} \frac{(x, y, z + L)}{(x^2 + y^2 + (z + L)^2)^{3/2}} + \frac{Q'}{4\pi} \frac{(x, y, z - L)}{(x^2 + y^2 + (z - L)^2)^{3/2}},$$
$$\vec{E}_A(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{(x, y, z + L)}{(x^2 + y^2 + (z + L)^2)^{3/2}} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{(x, y, z - L)}{(x^2 + y^2 + (z - L)^2)^{3/2}}.$$

Pro určení elektrického pole v oblasti $z > 0$ si představme, že celý prostor je vakuum. V horní části poloprostoru se nenachází žádný náboj a ve spodní části poloprostoru budeme uvažovat náboj Q'' v bodě $(0, 0, -L)$. Vektory elektrické indukce a intenzity jsou pak dány jako

$$\vec{D}_B(x, y, z) = \frac{Q''}{4\pi} \frac{(x, y, z + L)}{(x^2 + y^2 + (z + L)^2)^{3/2}},$$
$$\vec{E}_B(x, y, z) = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x, y, z + L)}{(x^2 + y^2 + (z + L)^2)^{3/2}}.$$

Na rozhraní mezi dielektrikem a vakuem (t.j. pro $z = 0$) se musí zachovat tečné složky elektrické intenzity (t.j. x a y složky) a rovněž složka elektrické indukce kolmá k rozhraní (t.j. složka z). Musí tedy být splněny podmínky

$$E_{A,x}(x, y, 0) = E_{B,x}(x, y, 0), \quad E_{A,y}(x, y, 0) = E_{B,y}(x, y, 0), \quad D_{A,z}(x, y, 0) = D_{B,z}(x, y, 0),$$

Po dosazení dostaneme následující podmínky:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{x}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{x}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}},$$
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{y}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{y}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}},$$
$$\frac{Q}{4\pi} \frac{L}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}} + \frac{Q'}{4\pi} \frac{-L}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{Q''}{4\pi} \frac{L}{(x^2 + y^2 + L^2)^{3/2}},$$

které jsou splněny pro právě když platí

$$\frac{Q+Q'}{\varepsilon_r} = Q'', \qquad\qquad Q - Q' = Q''.$$

Z těchto dvou podmínek můžeme najít řešení pro Q' a Q''

$$Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} Q, \qquad\qquad Q'' = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} Q.$$

Výsledkem je tedy

$$\vec{D}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{(x,y,z+L)}{(x^2+y^2+(z+L)^2)^{3/2}} & z>0, \\ \dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{(x,y,z+L)}{(x^2+y^2+(z+L)^2)^{3/2}} + \dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{(x,y,z-L)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}}, & z<0, \end{cases}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(x,y,z+L)}{(x^2+y^2+(z+L)^2)^{3/2}} & z>0, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{(x,y,z+L)}{(x^2+y^2+(z+L)^2)^{3/2}} + \dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{(x,y,z-L)}{(x^2+y^2+(z-L)^2)^{3/2}}, & z<0, \end{cases}$$