Cvičení 7 - Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony

Hustota elektrického proudu a proud

Elektrický proud lze vyjádřit jako množství elektrického náboje přesunutého za jednotku času

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

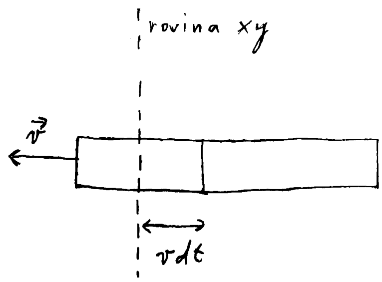
Proud protékající danou plochou lze také zapsat pomocí plošného integrálu II. druhu z hustoty elektrického proudu $\vec{j}$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Je-li proud tvořen rovnoměrným pohybem nabitých částic, pak lze proudovou hustotu zapsat jako součin vektoru rychlosti těchto částic a objemové hustoty náboje těchto částic

$$\vec{j} = \rho\vec{v}.$$

Uvažujme tyč kruhového průřezu poloměru R homogenně nabitou objemovou hustotou náboje ρ. Osa tyče splývá s osou z a tyč se pohybuje rychlostí v ve směru své osy. Úkolem bude určit velikost proudu, která protéká přes plochu tvořenou rovinnou x-y.



Proud můžeme vypočíst dvěma způsoby. Uvažujme krátký časový úsek $\mathrm{d}t$. Za tento čas se přes plochu přesune kus nabité tyče délky $v\mathrm{d}t$ a objemu $\pi R^2 v\mathrm{d}t$. Protože je tyč homogenně nabitá, odpovídá to množství náboje $\mathrm{d}Q = \pi R^2 \rho v\mathrm{d}t$. Proud pak můžeme vyjádřit jako množství náboje přeneseného za jednotku času

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \pi R^2 \rho v.$$

Druhý způsob jak postupovat, je to že si vyjádříme vektor hustoty elektrického proudu uvnitř tyče (vně tyče je nulový)

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = (0, 0, \rho v).$$

Proud pak můžeme vypočíst pomocí plošného integrálu

$$I = \iint_{\text{rovina xy}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{průřez tyče}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pi R^2 \rho v,$$

kde jsme využili toho, že nenulový příspěvek dostaneme pouze v místech roviny xy, kde se tato rovina protíná s tyčí.

Ohmův zákon

Ohmův zákon udává lineární závislost mezi úbytkem napětí a proudem

$$U = RI,$$

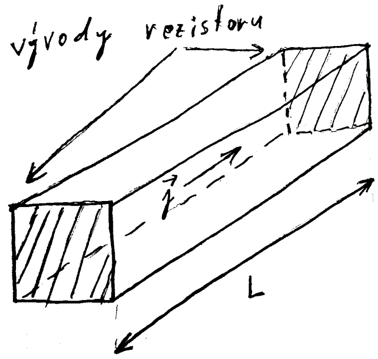
přičemž konstanta úměrnosti se nazývá elektrický odpor. Součástka, která je vytvořena tak, aby pokud možno co nejideálněji realizovala toto chování se nazývá rezistor.

V diferenciálním tvaru reprezentujeme Ohmův zákon jako zákon úměrnosti mezi vektorem elektrické intenzity a vektorem proudové hustoty

$$\vec{E} = \rho_m \vec{j},$$

kde konstanta úměrnosti se nazývá rezistivita (nebo měrný elektrický odpor). Převrácená hodnota rezistivity $\sigma_m = 1/\rho_m$ se nazývá konduktivita (nebo měrná elektrická vodivost).

Naším úkolem bude určit elektrický odpor rezistoru tvořeného kvádříkem z materiálu s rezistivitou ρ_m. Dvě protilehlé stěny kvádříku jsou pokryty vodivými elektrodami se zanedbatelným odporem a k těmto elektrodám jsou připojeny vývody rezistoru. Plocha každé ze stěn je rovna S. Délka kvádříku je taková, že vzdálenost mezi elektrodami je L.



Můžeme předpokládat, že vektor proudové hustoty je konstantní v celém objemu kvádříku a směřuje od jedné elektrody k druhé, t.j.

$$\vec{j} = (0, 0, j_z).$$

Proud vtékající/vytékající z rezistoru lze vypočíst plošným integrálem přes plochu elektrody

$$I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_z \iint \mathrm{d}S = S j_z,$$

kde jsme využili toho, že vektor proudové hustoty je rovnoběžný s normálou k ploše a toho, že j_z je konstantní. Vektor elektrické intenzity vyjádříme z vektoru proudové hustoty pomocí diferenciálního Ohmova zákona

$$\vec{E} = \rho_m \vec{j} = (0, 0, \rho_m j_z).$$

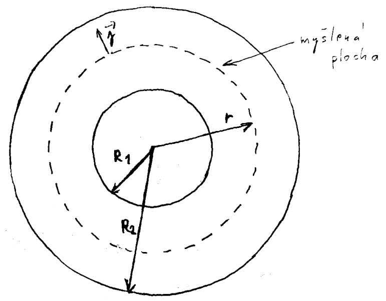
Napětí mezi elektrodami pak můžeme vypočíst pomocí křivkového integrálu z vektoru elektrické intenzity přes křivku začínající na jedné elektrodě a končící na druhé elektrodě. Nebo, uvědomíme-li si, že vektor elektrické intenzity je konstantní a směřuje od jedné elektrody k druhé, můžeme napětí vypočíst jako součin velikosti elektrické intenzity a vzdálenosti elektrod

$$U = EL = \rho j_z L.$$

Elektrický odpor pak můžeme vyjádřit jako podíl úbytku napětí na rezistoru (napětí mezi elektrodami) a proudu protékajícího rezistorem (proud přes elektrody)

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho_m L}{S}.$$

Jako další příklad si vypočteme odpor rezistoru vytvořeného tak, že vývody rezistoru jsou připojeny ke dvěma vodivým elektrodám zanedbatelného odporu tvaru kulových slupek s poloměry R_1 a R_2. Středy kulových slupek tvořící elektrody leží ve stejném bodě. Prostor mezi elektrodami je vyplněn prostředím s rezistivitou závislou na vzdálenosti od středu podle předpisu $\rho_m(r) = Kr$.



Ze symetrie problému je zřejmé, že vektor hustoty elektrického proudu (a rovněž vektor elektrické intenzity) musí směřovat od středu a velikost tohoto vektoru může záviset pouze na vzdálenosti od středu. Předpokládejme, že proud vtéká do vnitřní elektrody a vytéká vnější elektrodou. Představme si myšlenou plochu tvaru povrchu koule poloměru r, kde $R_1 < r < R_2$. Všechen proud co vtéká vnitřní elektrodou (a vytéká vnější) musí téct přes tuto plochu. Platí tedy

$$I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j(r) \iint \mathrm{d}S = 4\pi r^2 j(r) \quad \Rightarrow \quad j(r) = \frac{I}{4\pi r^2},$$

kde jsme využili toho, že vektor hustoty proudu je kolmý k této ploše a má ve všech bodech plochy stejnou velikost. Z proudové hustoty můžeme pomocí diferenciálního Ohmova zákona vypočíst elektrickou intenzitu

$$E(r) = \rho_m(r) j(r) = \frac{KI}{4\pi r}.$$

Napětí mezi elektrodami lze poté vypočíst integrálem z elektrické intenzity

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\mathrm{d}r = \frac{KI}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Odpor rezistoru je pak dán jako podíl napětí mezi elektrodami a proudem rezistorem

$$R = \frac{U}{I} = \frac{K}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Odpor rezistoru lze vypočíst i jiným způsobem. Uvažovaný rezistor si můžeme představit jako sériové zapojení mnoha rezistorů tvořených velmi tenkými kulovými slupkami. Protože tloušťka každé ze slupek je velmi malá, můžeme zanedbat křivost této slupky a elektrický odpor této slupky vypočíst jako by se jednalo o rezistor tvaru kvádříku se stejnou (velmi malou) tloušťkou a plochu rovnou povrchu kulové slupky. Protože se vzdálenost od středu v rámci kulové slupky změní jen o nepatrnou hodnotu, můžeme rovněž zanedbat závislost rezistivity na r a provést výpočet jakoby kdyby byla rezistivita konstantní. Elektrický odpor kulové slupky poloměru r a tloušťky dr je pak roven

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho_m(r)\mathrm{d}r}{S} = \frac{Kr\mathrm{d}r}{4\pi r^2}.$$

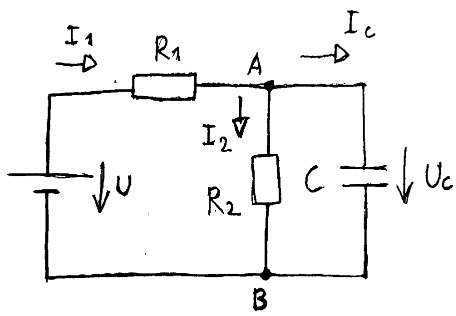
Protože se jedná o sériové řazení rezistorů, je celkový odpor dán součtem odporů jednotlivých slupek. V limitním přechodu, kdy budeme uvažovat nekonečný počet infinitesimálně tlustých slupek pak musíme výsledek vyjádřit pomocí integrálu

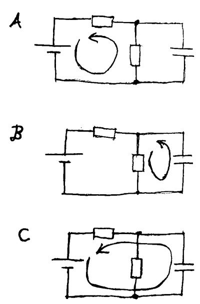
$$R = \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{K\mathrm{d}r}{4\pi r} = \frac{K}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Kirchhoffovy zákony

První Kirchhoffův zákon říká, že součet všech proudů přitékajících do uzlu je roven nule. Při užití této formulace uvažujeme proudy přitékající do uzlu jako kladné a proudy vytékající z uzlu jako záporné. Značíme-li proudy pomocí šipek, pak to znamená že proudy reprezentované šipkou směřujících do uzlu přičítáme a proudy reprezentované šipkou směřujících od uzlu odčítáme. Druhý Kirchhoffův zákon říká, že součet všech napětí v uzavřené smyčce musí být roven nule.

Budeme uvažovat zapojení znázorněné na obrázku (varianta RC obvodu). Úkolem bude vypočíst závislost proudu odebíraného ze zdroje a napětí na kondenzátoru na čase. V čase $t = 0$ je kondenzátor vybitý, t.j. napětí na kondenzátoru je rovno nule.





Z prvního Kirchhoffova zákona dostaneme pro uzel A a uzel B

$$\begin{aligned} &(A) \qquad I_1 - I_2 - I_C = 0, \\ &(B) \qquad -I_1 + I_2 + I_C = 0. \end{aligned}$$

Z druhého Kirchhoffova zákona dostaneme pro smyčky znázorněné na obrázku napravo

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}) \qquad U - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0, \\ &(\mathcal{B}) \qquad R_2 I_2 - U_C = 0, \\ &(\mathcal{C}) \qquad U - U_C - R_1 I_1 = 0. \end{aligned}$$

Je zřejmé, výše uvedené rovnice nejsou nezávislé. Rovnice pro oba uzly jsou si ekvivalentní a rovnice $(\mathcal{C})$ je rovna součtu rovnic $(\mathcal{A})$ a $(\mathcal{B})$. Samozřejmě stačí uvažovat pouze rovnice od tolika uzlů a smyček, tak abychom dostali úplný systém nezávislých rovnic.

Velikost proudu přitékajícího do kondenzátoru lze zapsat pomocí časové derivace náboje na kondenzátoru, který lze vyjádřit jako součin kapacity a napětí na kondenzátoru

$$I_C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(CU_C)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}.$$

Nyní využijeme rovnice co jsme dostali z prvního Kirchhoffova zákona k vyjádření proudu přes rezistor R_1 pomocí proudu přes rezistor R_2 a proudu kondenzátorem

$$I_1 = I_2 + I_C$$

Z rovnice $(\mathcal{B})$ co jsme dostali z druhého Kirchhoffova vyjádříme proud rezistorem R_2

$$I_2 = \frac{U_C}{R_2}.$$

Z rovnice $(\mathcal{A})$ co jsme dostali z druhého Kirchhoffova zákona pak dostaneme

$$U = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_C = \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} U_C + R_1 C \frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t},$$

nebo po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} U_C = \frac{U}{R_1 C}.$$

Jedná se o nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, která se se dá řešit tak, že nejdříve vyřešíme odpovídající homogenní rovnici a pak pomocí metody variace konstant najdeme řešení nehomogenní rovnice.

Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici (vypustíme člen na pravé straně, který nezávisí na U_C nebo jeho derivaci)

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}U_C = 0 \quad \Rightarrow \quad U_C(t) = K\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right),$$

kde K je integrační konstanta. Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou variace konstant, t.j. místo konstanty K budeme uvažovat funkci $K(t)$ závislou na čase. Funkce $U_C(t)$ a její derivace jsou pak rovny

$$U_C(t) = K(t)\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right),$$
$$U_C'(t) = K'(t)\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right) - \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}K(t)\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right)$$

kde čárka značí derivaci vzhledem k t. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}U_C = K'(t)\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right) = \frac{U}{R_1C}.$$

Odtud dostaneme

$$K'(t) = \frac{U}{R_1C}\exp\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right) \quad \Rightarrow$$
$$K(t) = \int \frac{U}{R_1C}\exp\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right)\mathrm{d}t = \frac{R_2U}{R_1+R_2}\exp\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right) + A,$$

kde A je integrační konstanta. Dosazením této závislosti do vztahu pro $U_C(t)$ získáme závislost napětí na kondenzátoru na čase vyjádřenou jako

$$U_C(t) = \frac{R_2U}{R_1+R_2} + A\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right).$$

Hodnotu integrační konstanty A určíme z podmínky, že v čase $t=0$ je napětí na kondenzátoru nulové

$$0 = U_C(0) = \frac{R_2U}{R_1+R_2} + A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{R_2U}{R_1+R_2}.$$

Výslednou závislostí napětí na kondenzátoru na čase je

$$U_C(t) = \frac{R_2U}{R_1+R_2}\left(1-\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right)\right).$$

Proud odebíraný ze zdroje pak vyjádříme jako

$$I_1 = I_2 + I_C = \frac{U_C}{R_2} + C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{R_1+R_2} + \left(\frac{U}{R_1} - \frac{U}{R_1+R_2}\right)\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t\right).$$

Tento výsledek lze snadno interpretovat. V čase $t=0$ je na kondenzátoru (a tudíž také na rezistoru R_2 nulové napětí) a napětí od zdroje musí být rovno úbytku na rezistoru R_1. Z Ohmova zákona pak zjistíme, že v čase $t=0$ je ze zdroje odebírán proud U/R_1. V čase $t=\infty$ je obvod v ustáleném stavu, kdy se již napětí na jednotlivých prvcích v obvodu nemění. Napětí na kondenzátoru je tedy konstantní a protože proud vtékající do kondenzátoru je úměrný časové změně napětí na kondenzátoru, neteče přes kondenzátor žádný proud. Obvod se tedy musí chovat tak, jako kdyby v obvodu kondenzátor tedy nebyl. To znamená stejně jako kdyby byl zdroj připojen k sériově zařazeným rezistorům R_1 a R_2. Proud odebíraný ze zdroje je tedy $U/(R_1+R_2)$.