Elektrický potenciál úsečky

Uvažujme úsečku délky $2l$ ležící na ose z se středem v počátku nabitou konstantní délkovou hustotou náboje τ. Naším úkolem bude určit elektrický potenciál v libovolném bodě prostoru.

Polohový vektor bodu, pro který budeme elektrický potenciál určovat označíme

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Pro úsečku zvolíme parametrizaci

$$\vec{r}'(t) = (0, 0, t),$$

přičemž parametr t leží v intervalu $[-l, l]$.

Odtud můžeme vypočítst

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x, y, z - t), \qquad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2},$$
$$\mathrm{d}\vec{l}' = (0, 0, 1)\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}l' = |\mathrm{d}\vec{l}'| = \mathrm{d}t,$$

a poté vyjádřit elektrický potenciál pomocí integrálu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\tau(\vec{r}')\mathrm{d}l'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}}.$$

Provedeme substituci $u = t - z$ a dále pak označíme vzdálenost od osy z symbolem r, t.j. $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l-z}^{l-z} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{r^2 + u^2}}.$$

Vzniklý integrál lze vypočíst s užitím Eulerovy substituce [1]

$$\sqrt{r^2 + u^2} = -u + v.$$

Umocníne-li obě strany rovnice na druhou, dostaneme rovnici

$$r^2 + u^2 = u^2 - 2uv + v^2.$$

(Při užití Eulerovy substituce je důležité, že členy u^2 na obou stranách rovnice se odečtou.) Odtud můžeme vyjádřit u jako funkci v a odtud pak také vujádříme $\mathrm{d}u$ pomocí $\mathrm{d}v$:

$$u = \frac{v^2 - r^2}{2v}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v = \frac{v^2 + r^2}{2v^2}\mathrm{d}v.$$

Abychom mohli dosadit za $\sqrt{r^2 + u^2}$ tak budeme potřebovat

$$\sqrt{r^2 + u^2} = -u + v = -\frac{v^2 - r^2}{2v} + v = \frac{v^2 + r^2}{2v}.$$

S užitím této substituce pak dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \int \frac{\frac{v^2 + r^2}{2v^2}\mathrm{d}v}{\frac{v^2 + r^2}{2v}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln|v| = \ln(\sqrt{r^2 + u^2} + u).$$

Výsledek pro elektrický potenciál je tedy

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln(\sqrt{r^2 + u^2} + u)\right]_{-l-z}^{l-z} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left(\ln(\sqrt{r^2 + (l-z)^2} + l - z) - \ln(\sqrt{r^2 + (l+z)^2} - l - z)\right)$$
$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (l-z)^2} + l - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (l+z)^2} - l - z}\right).$$

[1] Eulerovu substituci lze užít, pokud počítáme integrál z racionální funkce (t.j. podílů dvou polynomů) v proměnných x a $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, kde $ax^2 + bx + c$ je nerozlžitelný kvadratický trojčlen. Substituci provedeme tak, že novou integrční proměnnou v zavedeme předpisem $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm v$, přičemž znaménka před $\sqrt{a}x$ a v můžeme volit libovolně.