SEMINÁŘE Z FYZIKY – 2. ročník

2. blok: Čas a prostor ve speciální teorii relativity

(únor 2005)

Intuitivně chápeme, co je trojrozměrný prostor a co je čas. V teorii relativity ovšem nepovažujeme za výchozí pojmy prostor a čas, nýbrž pojem prostoročas. Jeho body tvoří "všechna místa ve všech časech" a je tedy čtyřrozměrný. Pokud by bylo možné o jakýchkoli dvou událostech v prostoročase rozhodnout, zda nastaly současně, a na tomto rozhodnutí by se shodli všichni pozorovatelé (tj. absolutní současnost událostí), mohli bychom prostoročas "rozplátkovat" trojrozměrnými plochami, z nichž každá je tvořena všemi možnými současnými událostmi. Každá z těchto ploch by představovala prostor v jistém časovém okamžiku a prostoročas by se tak jediným fyzikálně smysluplným způsobem rozdělil na prostor a čas. Jak uvidíme v dalším, v teorii relativity prostoročas tímto způsobem rozdělit na prostor a čas nelze. Odvodíme také Lorentzovu transformaci, dotkneme se paradoxu dvojčat a pojmů budoucnosti a minulosti ve speciální teorii relativity.

1. Inerciální soustava souřadnic

Uvažujme pro jednoduchost, že prostoročas není čtyřrozměrný, ale pouze dvourozměrný (jedna prostorová a jedna časová dimenze). Uvažujme dále volně se pohybujícího pozorovatele P vybaveného hodinkami a světelným zdrojem. Pokud v jeho bezprostřední blízkosti dojde k nějaké události, P ji zaregistruje a přiřadí jí prostorovou souřadnici $x = 0$ a časovou souřadnici t (údaj, který právě ukazují jeho hodinky). Jakým způsobem ale přiřadí souřadnice událostem v odlehlých částech prostoročasu? Řekněme, že někde v prostoročase dojde k události reprezentované prostoročasovým bodem U. Pozorovatel P vyšle světelný signál tak, že tento signál na své dráze potká právě bod U, kde je nějakým pomyslným zrcátkem odražen zpět k pozorovateli. Pozorovatel P si zaznamená údaj t_1, který ukazovaly jeho hodinky, když signál vysílal, a údaj t_2, který ukazovaly jeho hodinky, když se k němu odražený signál vrátil (Obr.1). P potom přiřadí události U souřadnice (t, x) následovně:

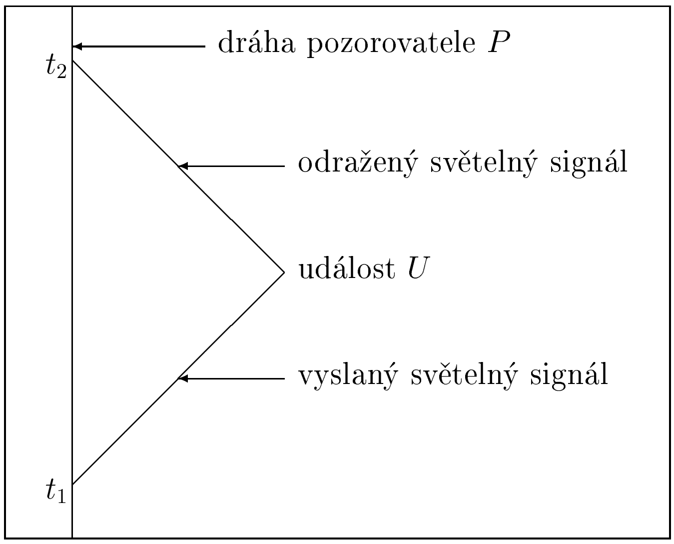
$$t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1),$$

$$x = c\frac{1}{2}(t_2 - t_1),$$

kde c je konstanta s rozměrem rychlosti, na jejíž hodnotě se fyzikové dohodnou a kterou používají všichni pozorovatelé. Tímto způsobem dovede pozorovatel P libovolnému bodu v prostoročase přiřadit dvojici souřadnic (t, x). Takto konstruované soustavě souřadnic v prostoročase říkáme *inerciální soustava souřadnic pozorovatele* P. Nyní, když P umí každému prostoročasovému bodu přiřadit časovou a prostorovou souřadnici, může také měřit rychlosti objektů. Pro rovnoměrně se pohybující těleso se rychlost určí podle vzorce $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, takže např. pro výše uvažovaný světelný signál vyslaný z bodu o souřadnicích $t = t_1, x = 0$ do bodu U o souřadnicích $t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1), x = c\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ dostáváme

$v = \frac{c\frac{1}{2}(t_2-t_1)-0}{\frac{1}{2}(t_2+t_1)-t_1} = c$. Znamená to, že rychlost světelného signálu vyslaného libovolným pozorovatelem měřená v jeho inerciální soustavě má hodnotu c, na které se fyzikové předem dohodli. To, že tato rychlost je věcí dohody a nikoli měření, můžeme chápat následovně: Kdybychom měli předem dánu jednotku času a délky, mohli bychom rychlost světla změřit. Můžeme však postupovat i tak, že máme pouze jednotku času, na rychlosti světelného signálu v soustavě pozorovatele P, který signál vysílá, se dohodneme a jednotku délky pak dodefinujeme jako vzdálenost, kterou signál v soustavě pozorovatele P urazí za $\frac{1}{c}$ sekund.

část dvourozměrného prostoročasu



Obr.1

2. Principy speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity je založena na dvou základních postulátech.

Princip relativity: Fyzikální zákony mají v inerciálních soustavách všech pozorovatelů stejný tvar.

Princip konstantní rychlosti světla: Světlo se ve vakuu pohybuje v inerciálních soustavách všech pozorovatelů stejnou rychlostí, a to nezávisle na tom, jakou rychlostí se pohyboval zdroj, ze kterého bylo vysláno.

Princip konstantní rychlosti světla tedy říká nejen to, že rychlost světelného signálu vyslaného jistým pozorovatelem z pohledu jeho vlastní soustavy souřadnic bude stejná, ať se bude jednat o jakéhokoli pozorovatele, ale říká také, že rychlost světelného signálu vyslaného pozorovatelem P_1 měřená v soustavě libovolného jiného pozorovatele P_2 bude stejná, ať už se P_2 pohybuje vzhledem k P_1 jakoukoli rychlostí. [1]

[1] Principy teorie relativity zpětně dávají větší smysl definici inerciální soustavy souřadnic a jednotky délky pomocí světla. Nemusíme např. dbát na pohyb zdroje, ze kterého byl světelný signál vyslán.

3. Lorentzova transformace

Uvažujme nyní dva pozorovatele P a P'. Pozorovatel P' se pohybuje konstantní rychlostí v v soustavě pozorovatele P. Tito dva se v jistém okamžiku míjeli a v této chvíli si seřídili hodinky tak, aby ukazovaly nulový čas. Nechť v prostoročase dojde k události U. P jí přiřadí výše popsaným způsobem souřadnice (t,x) a P' jí stejným způsobem za použití svých hodinek a svého světla přiřadí souřadnice (t',x'). Otázka zní, jakým vztahem spolu souvisejí souřadnice (t,x) a (t',x').

Následující postup je převzat z [1]. Souřadnice vyslání, resp. příjmu světelného signálu pozorovatelem P' v souřadnicové soustavě pozorovatele P označme (t_p,x_p), resp. (t_k,x_k). Čas na hodinkách pozorovatele P' při vyslání, resp. příjmu signálu tímto pozorovatelem označme t'_p, resp. t'_k. P' tedy události U přiřadí souřadnice

$$t' = \frac{1}{2}(t'_k + t'_p), \quad x' = c\frac{1}{2}(t'_k - t'_p). \tag{1}$$

V předrelativistické fyzice bychom přirozeně položili $t'_p = t_p,\ t'_k = t_k$. Ukázalo by se však, že takový předpoklad je neslučitelný s principy speciální teorie relativity, což bude patrno z dalšího postupu. Budeme předpokládat, že

$$t'_p = kt_p, \quad t'_k = kt_k, \tag{2}$$

kde k je faktor závisející pouze na v. Naším cílem je vyjádřit t' a x' pomocí t a x. Víme, že P' se pohybuje konstantní rychlostí v v souřadnicové soustavě P a že se v čase $t=0$ nacházel v bodě $x=0$ (okamžik míjení obou pozorovatelů). Platí tedy $x_p = vt_p$. Z principu konstantní rychlosti světla plyne, že světelný signál vyslaný pozorovatelem P' se pohybuje rychlostí c i v soustavě P. Platí tedy $x - x_p = c(t - t_p)$. Z posledních dvou vztahů dostaneme

$$t_p = \frac{ct - x}{c - v}. \tag{3}$$

Podobná argumentace nás dovede k rovnicím $x_k = vt_k$ a $x - x_k = c(t_k - t)$ a odtud získáme

$$t_k = \frac{ct + x}{c + v}. \tag{4}$$

Dosazením (2),(3),(4) do (1) dostaneme

$$t' = k\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad x' = k\frac{x - vt}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{5}$$

Zbývá určit k. K tomu použijeme princip relativity. Zatímco mezi údajem t' na hodinkách P' a souřadnicovým časem t pozorovatele P v bodě prostoročasu, kde se P' právě nachází, platí podle (2) vztah $t' = kt$, mezi údajem t na hodinkách P a souřadnicovým časem t' pozorovatele P' v bodě prostoročasu, kde se právě nachází P $(x=0, t=t)$, platí podle (5) vztah $t = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{k}t'$. Jelikož podle principu relativity jsou pozorovatelé P a P' rovnocenní, musí platit $k = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{k}$ a tedy $k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Dosazením do (5) získáme

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

Tyto vztahy nazýváme *speciální Lorentzovou transformací*. Všimněme si, že výše uvedené odvození je platné pouze pro $| v |< c$, protože jinak je k imaginární nebo nulové.

4. Vlastní čas a paradox dvojčat

Čas, který ukazují hodinky cestující spolu s libovolně (ne nutně rovnoměrně přímočaře) se pohybujícím objektem, nazýváme vlastním časem tohoto objektu a značíme jej τ. Například pro pozorovatele P' z předchozí části, který se pohybuje rovnoměrně přímočaře, jsme zjistili, že $\tau = kt = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t$. Zjišťujeme-li, jaký vlastní čas uplyne pozorovateli P' během jeho pohybu mezi prostoročasovými body U_1, U_2 se souřadnicemi (t_1, x_1) a (t_2, x_2), dostaneme

$$\Delta\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(t_2-t_1) = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right)^2}(t_2-t_1) = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2}, \tag{7}$$

kde jsme dosadili $v = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$. Kdybychom pro vyjádření $\Delta\tau$ použili soustavu souřadnic jiného pozorovatele P'' na místo P, dospěli bychom stejným postupem ke vztahu

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2''-t_1'')^2-(x_2''-x_1'')^2}, \tag{8}$$

kde (t_1'', x_1'') a (t_2'', x_2'') jsou souřadnice bodů U_1, U_2 v soustavě P''. Jelikož levé strany rovnic (7) a (8) jsou si rovny, musí si být rovny i pravé strany. Platí tedy

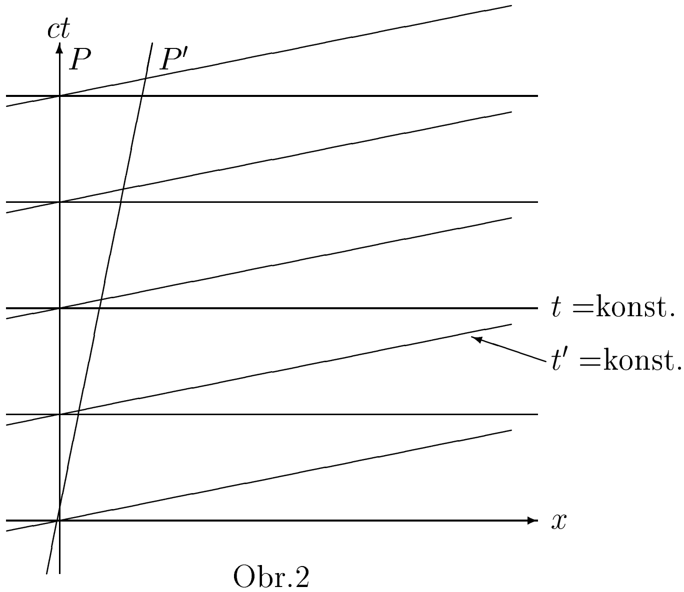
$$c^2(t_2''-t_1'')^2-(x_2''-x_1'')^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2, \tag{9}$$

což lze ověřit i přímým dosazením Lorentzovy transformace mezi soustavami P a P''. Výraz $c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2$ tedy hraje význačnou roli ve speciální teorii relativity a říkáme o něm, že je invariantní (neměnný) vzhledem k Lorentzově transformaci.

Vztah (7) má nezvyklý důsledek. Uvažujme těleso a, které je v klidu v počátku soustavy souřadnic pozorovatele P, a těleso b, které v čase $t = 0$ opustí těleso a, vzdaluje se od něj stálou rychlostí v až do času $t = \frac{T}{2}$, kdy se otočí a opět se přibližuje k a rychlostí o velikosti v a v čase $t = T$ se s ním setká. Spočtěme vlastní časy těchto těles mezi jejich rozdělením a setkáním. Pro a dostáváme $\Delta\tau_a = T$. Pro b vlastní čas sestává ze součtu vlastního času při vzdalování a vlastního času při přibližování $\Delta\tau_b = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{T}{2} + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{T}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,T$. Máme tedy $\Delta\tau_b < \Delta\tau_a$. Pokud by tělesa a a b byla dvojčata, došlo by k tomu, že v okamžiku setkání by dvojče a bylo starší než b, což se označuje jako paradox dvojčat. Můžeme namítnout, že pohyb tělesa b je nereálný. Pokud má toto těleso změnit směr pohybu, musí podstoupit brždění a zrychlování, které nějakou dobu trvá. Nemůže se obrátit v jediném okamžiku a po zbytek dráhy se pohybovat konstantní rychlostí. Podrobnějším rozborem se však ukazuje, že i pro reálné brzdící a zrychlující těleso b dospějeme opět k nerovnosti $\Delta\tau_b < \Delta\tau_a$.

5. Relativita současnosti a pojmy minulosti a budoucnosti

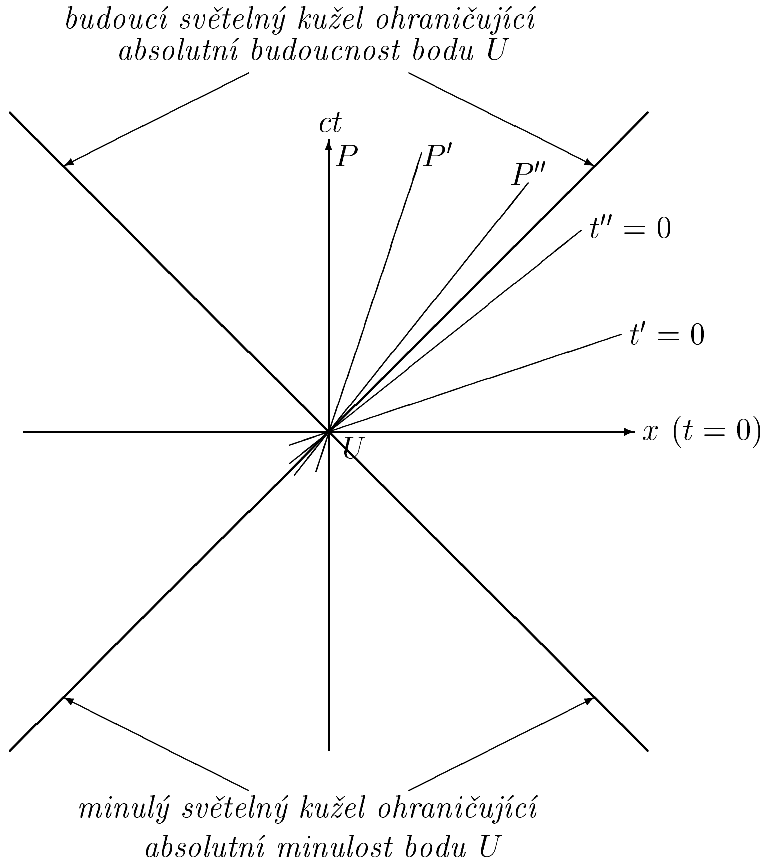
Pozorovatel P prohlásí o dvou událostech, že nastaly současně, jestliže nastaly ve stejném čase t. Podobně pozorovatel P' prohlásí o dvou událostech, že nastaly současně, jestliže nastaly ve stejném čase t'. Otázka zní, zda se pozorovatelé P a P' na současnosti dvou událostí shodnou. Odpověď nalezneme v Obr. 2, kde jsou znázorněny křivky konstantního času t a t'. Křivky konstantního času t' získáme položením $t' = t_0$ v (6), z čehož plyne rovnice $ct = \frac{v}{c}x + ct_0k$. Vidíme, že křivky konstantního času různých pozorovatelů nesplývají. Různí pozorovatelé se tedy na současnosti událostí neshodnou. To také znemožňuje rozdělit prostoročas jednoznačným způsobem na prostor a čas, protože každý pozorovatel by toto rozdělení udělal jinak.



Obr.2

Zamysleme se nyní nad pojmy budoucnosti a minulosti prostoročasového bodu U ve speciální teorii relativity. Uvažujme pozorovatele P a P', jejichž dráhy procházejí bodem U a jejichž hodinky v tomto bodě ukazují nulový čas. Pozorovatel P přirozeně považuje za budoucnost bodu U tu část prostoročasu, ve které platí $t > 0$. Podobně pozorovatel P' považuje za budoucnost bodu U část prostoročasu, ve které platí $t' > 0$. Tyto části prostoročasu ale nejsou stejné. Různí pozorovatelé se tedy tímto způsobem neshodnou na tom, co je budoucnost bodu U. Částem prostoročasu $t > 0$, resp. $t' > 0$ budeme říkat relativní budoucnost bodu U pro pozorovatele P, resp. P'. Existuje však způsob, jak definovat budoucnost bodu U nezávisle na volbě pozorovatele. Můžeme např. vzít průnik relativních budoucností bodu U pro všechny reálné pozorovatele tímto bodem procházející. Jak se ukazuje v relativistické dynamice, reálný hmotný objekt může dosáhnout pouze podsvětelné rychlosti. Průnik relativních budoucností bodu U pro všechny podsvětelně se pohybující pozorovatele tímto bodem procházející tvoří výřez prostoročasu, který je ohraničen drahami světelných signálů vycházejících z bodu U, jak je patrno z Obr. 3. Množině bodů tvořené drahami světelných signálů vyslaných z bodu U do všech možných směrů říkáme *budoucí světelný kužel v bodě U* [2] a vnitřku tohoto kužele říkáme *absolutní budoucnost bodu U*. Absolutní budoucnost bodu U lze také ekvivalentně definovat jako množinu bodů prostoročasu, do kterých se reálný pozorovatel může z bodu U dostat. Podobné úvahy lze provádět i o minulosti bodu U.

[2] Smysl výrazu *kužel* vynikne až pro více rozměrů než dva.



Obr.3

Literatura

[1] J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník, *Mechanika ve fyzice*, Academia 2001