Cvičení z fyziky pro chemiky

Vektorový počet

1. Proveďte graficky:
   (a) Součet zadaných vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$
   (b) Rozdíl zadaných vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$
   (c) Rozklad vektoru $\vec{F}$ do dvou zadaných směrů
   (d) Určete vektor $\vec{a}_2$ tak, aby platilo $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}$, kde $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$ jsou zadány.
   (e) Nalezněte vektor $\vec{b} = 2.5\vec{a}$, kde $\vec{a}$ je předem zadán.
   (f) Nalezněte vektor $\vec{c} = -4\vec{a}$, kde $\vec{a}$ je předem zadán.

2. Najděte velikost vektorů $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 4\vec{j}$, kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směrech os x,y,z. [$|\vec{a}| = \sqrt{38}$, $|\vec{b}| = \sqrt{13}$, $|\vec{c}| = \sqrt{17}$]

3. Na hmotný bod působí síly $\vec{F}_1 = (-3, 6, 2)N$, $\vec{F}_2 = (-5, -1, 2)N$ a $\vec{F}_3 = (6, 6, -4)N$. Určete výslednou působící sílu a její velikost. [$\vec{F} = (-2, 11, 0)N$, $F = |\vec{F}| = 5\sqrt{5}N$]

4. Určete, jaké úhly svírá vektor $\vec{a} = (4, -3, 2)$ s osami soustavy souřadnic.

   [$\alpha = 42.03°$, $\beta = 123.85°$, $\gamma = 68.2°$]

5. Zrychlení hmotného bodu má velikost 3 ms^{-2}. Určete jeho složky ve směru os x,y v okamžiku, kdy vektor svírá úhel 30° s kladným směrem osy x.

   [$a_x = 2.6ms^{-2}$, $a_y = 1.5ms^{-2}$]

6. Určete, jak velkou práci vykoná dostředivá síla o konstatní velikosti 2N při jednom oběhu po kružnici o poloměru 1m. Práce síly je dána vztahem $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r}$, kde $d\vec{r}$ je orientované posunutí ve směru pohybu. Návod: Určete nejprve velikost skalárního součinu v integrálu.

   [$\vec{F}.d\vec{r} = 0$, neboť vektory jsou na sebe kolmé, tedy i celková práce je nulová.]

7. Určete moment hybnosti hmotného bodu, je-li jeho hmotnost 1kg, rychlost $\vec{v} = (2, 0, -1)m.s^{-1}$ a průvodič $\vec{r} = (0, 1, -2)m$. Moment hybnosti je definován vztahem $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, kde $\vec{p} = m.\vec{v}$ je hybnost hmotného bodu. [$\vec{L} = (-1, -4, -2)kgm^2s^{-1}$]

Diferenciální počet

1. Těleso se pohybuje ve svislém směru se stálým zrychlením $\vec{g} = (0, 0, -g)$, v čase $t = 0s$ byla jeho poloha $\vec{r} = (0, 0, h)$ a jeho rychlost C.
   (a) Určete jeho zrychlení, rychlost a polohu v libovolném čase t.

(b) Určete, v kterém časovém okamžiku se bude těleso nacházet v počátku souřadnic, a určete jeho rychlost v tomto časovém okamžiku.

[(a) $\vec{g} = (0, 0, -g)$, $\vec{v} = (0, 0, -gt)$, $\vec{r} = (0, 0, h - \frac{1}{2}gt^2)$
(b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $\vec{v} = (0, 0, -\sqrt{2gh})$]

2. Polohový vektor hmotného bodu je $\vec{r} = (2\sin(\omega t), 3\cos(\omega t))m$.

   (a) Určete, po jaké křivce se hmotný bod pohybuje, nakreslete obrázek.

   (b) Určete složky rychlosti a zrychlení při pohybu po této křivce, vektory rychlosti a zrychlení ve zvoleném bodě zakreslete do obrázku.

[(a) po elipse se středem v počátku a poloosami o velikostech 2m a 3m
(b) $\vec{v} = (2\omega\cos(\omega t), -3\omega\sin(\omega t))ms^{-1}$,
$\vec{a} = (-2\omega^2\sin(\omega t), -3\omega^2\cos(\omega t))ms^{-2}$.]

3. Těleso se pohybuje se zrychlením $\vec{a} = (-r\omega^2\cos(\omega t), -r\omega^2\sin(\omega t), -g)$, přičemž v čase $t = 0s$ byla jeho poloha $\vec{r} = (r, 0, h)$ a jeho rychlost $\vec{v} = (0, r\omega, 0)$.

   (a) Určete rychlost a polohu tohoto tělesa v libovolném časovém okamžiku.

   (b) Určete, po jaké křivce se těleso pohybuje.

[(a) ($\vec{v} = (-r\omega\sin(\omega t), r\omega\cos(\omega t), -gt)$, $\vec{r} = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), h - \frac{1}{2}gt^2)$,
(b) těleso se pohybuje po šroubovici, přičemž pohyb lze rozložit na rovnoměrný pohyb po kružnici v rovině xy a na volný pád ve směru osy z.]

4. Po zavěšení tělesa na pružinu a jeho vychýlení z rovnovážné polohy o vzdálenost x působí pružina na těleso vnější silou o velikosti $F = -kx$, kde k je konstanta a znaménko minus naznačuje, že síla působí v opačném směru, než je směr výchylky x.

   (a) Určete práci, kterou vykoná pružina při návratu z polohy ve vzdálenosti A od rovnovážné polohy do rovnovážné polohy.

   (b) Určete práci, kterou musíme vykonat vnější silou, napínáme-li pružinu tak, že její konec se přesune z rovnovážné polohy do vzdálenosti A od této polohy.

   (c) Určete práci, kterou vykoná pružina během jednoho kmitu, tj. během doby, kdy se její konec přesune z rovnovážné polohy do vzdálenosti A od této polohy, vrátí se do rovnovážné polohy, projde přes tuto polohu do vzdálenosti A od rovnovážné polohy a vrátí se zpět do rovnovážné polohy.

[(a) $W = \int_0^A F dx = -\frac{1}{2}kA^2$
(b) $W = \int_0^A (-F) dx = \frac{1}{2}kA^2$
(c) $W = 0J$]

5. Na spojnici Země-Měsíc existuje místo, v němž je gravitační síla, kterou působí na libovolné hmotné těleso Země, stejně velká, ale opačného směru, než síla, kterou působí Měsíc, tzv. Lagrangeův bod. Velikost gravitační síly, kterou na sebe působí tělesa o hmotnostech M a m, vzdálená od sebe o r, je dána vztahem $F_g = \kappa\frac{mM}{r^2}$, kde $\kappa = 6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}$ je gravitační konstanta.

(a) Určete, jak daleko od Země se nachází Langrangeův bod.

(b) Představte si, že byste byli vybaveni skafandrem a žebříkem, jenž by se jedním koncem opíral o Zemi a druhým o Měsíc. Určete práci, kterou byste vykonali při výstupu z povrchu Země do výšky rovné desetinásobku zemského poloměru. Při výpočtu neuvažujte vliv Měsíce.

[(a) vzdálenost od Země je $x = \frac{M-\sqrt{mM}}{m+M}R$, kde $M = 6.10^{24}kg$ je hmotnost Země, $m = 7,3.10^{22}kg$ hmotnost měsíce a $R = 384400000km$ je střední vzdálenost Země-Měsíc, číselně $x = 0.88R$.
(b) $W = \int_{R_z}^{10R_z}(F_{gZ})dr = \kappa\frac{9\mu M}{10R_z}$, kde μ je Vaše hmotnost a $R_z = 6378000km$ poloměr Země.]

Rozměrová analýza

1. Určete rozměr následujících veličin: síla, práce, výkon, energie, moment síly, moment hybnosti, frekvence, úhlová frekvence. Určit rozměr znamená vyjádřit jednotku dané veličiny pomocí základních jednotek (metr, sekunda, kilogram, amper, kelvin, mol a kandela).

   [$N = kgms^{-2}$, $J = kgm^2s^{-2}$, $W = kgm^2s^{-3}$, $J = kgm^2s^{-2}$, $Nm = kgm^2s^{-2}$, kgm^2s^{-1}, $Hz = s^{-1}$, $rads^{-1}$,]

2. Na základě rozměrové analýzy (porovnání rozměrů jednotek na obou stranách rovnosti) určete, která vyjádření pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu jsou chybná:

   $$s = at \quad s = a^2t \quad s = at^3 \quad s = \frac{a}{t} \quad s = \frac{v}{t^2} \quad s = \frac{1}{2}at^2.$$

   [všechna kromě posledního]

3. Rozhodněte, které z následujících vztahů jsou zapsány chybně a proč:

   $$\vec{F} = ma \quad \vec{F} = m\vec{v} \quad F = \kappa\frac{m}{r} \quad a = \kappa\frac{m}{r^2} \quad \omega = \frac{\vec{v}}{r} \quad \vec{v} = \frac{dr}{dt}.$$

   [všechny kromě vyjádření zrychlení]

4. Rozhodněte, které z následujících vztahů pro moment síly jsou zapsány chybně a proč:

   $$\vec{M} = rF\sin\alpha \quad \vec{M} = \vec{r}.\vec{F} \quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{p} \quad M = rF\cos\alpha.$$

   [všechny]

Statistické zpracování měření

1. Určete aritmetický průměr $\bar{d}$ a směrodatnou odchylku $\sigma(d) = \sqrt{\frac{\sum_i(\bar{d}-d_i)^2}{n(n-1)}}$ následujících měření délky, určete relativní chybu $\delta_r d = \frac{\sigma(d)}{\bar{d}}$ měření délky:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d[mm]	11	8	7	9	8	8	11	6	8	7	9	11	5	8	8	10	9	8

Měření byla prováděna pravítkem s milimetrovou stupnicí, proto rozumně zaokrouhlete.

[$\bar{d} = 8.4mm \doteq 8mm$, $\sigma(d) = 1,6mm \doteq 2mm$, $\delta_r d = 19\%$]

2. Závisí-li nepřímo měřená veličina Z na přímo měřených veličinách A,B,... podle vztahu Z=Z(A,B,...), pak absolutní chybu nepřímo měřené veličiny Z označujeme $\delta(Z)$ a určujeme pomocí tzv. zákona šíření chyb jako

$$\delta(Z) = \sqrt{\left(\frac{\partial Z(A,B,...)}{\partial A}\right)^2 \sigma^2(A) + \left(\frac{\partial Z(A,B,...)}{\partial B}\right)^2 \sigma^2(B) + ...}, \qquad (1)$$

kde $\sigma(A)$ a $\sigma(B)$ jsou chyby měření veličin A a B (například směrodatné odchylky).

(a) Je-li veličina Z dána jako $Z = A+B$ anebo $Z = A-B$, dokažte, že pro absolutní chybu $\delta(Z)$ platí $\delta(Z) = \sqrt{\sigma^2(A) + \sigma^2(B)}$.

(b) Je-li veličina Z dána jako $Z = k.A$, kde k je konstanta, dokažte, že pro absolutní chybu $\delta(Z)$ platí $\delta(Z) = k\sigma(A)$.

(c) Je-li veličina Z dána jako $Z = A.B$ anebo $Z = \frac{A}{B}$, dokažte, že pro relativní chybu $\delta_r(Z) = \frac{\delta(Z)}{Z}$platí $\delta_r(Z) = \sqrt{\delta_r^2(A) + \delta_r^2(B)}$, kde $\delta_r(A)$ a $\delta_r(B)$ jsou relativní chyby měření veličin A a B.

(d) Je-li veličina Z dána jako $Z = A^n$, kde n je přirozené číslo, dokažte, že pro relativní chybu $\delta_r(Z)$ platí $\delta_r(Z) = n\delta_r(A)$.

3. Při ověřování přesnosti ampérmetru bylo využito prvního Faradayova zákona elektrolýzy, podle nějž hmotnost látky m vyloučené při elektrolýze na elektrodách je přímo úměrná proudu I, který elektrolytem procházel, a času t, po který proud procházel: $m = AIt$, kde A je elektrochemický ekvivalent látky. Při měření procházel roztokem proud po dobu $t = (5251.0 \pm 0.2)s$ proud I a došlo k vyloučení $m = (0.222 \pm 0.001)g$ mědi ($A = 3,3.10^{-4} gC^{-1}mol^{-1}$).

(a) Určete velikost procházejícího proudu I, absolutní a relativní chybu určení proudu.

(b) Ampérmetr zapojený do obvodu měřil hodnotu $I = 0.1286A$ s absolutní chybou $\delta I = 0.0006A$. Rozhodněte na základě předchozích výsledků, je-li přesnost tohoto ampérmetru dostatečná.

[(a) $I = \frac{m}{At}$, $I = \frac{0.222}{5251.0\, 3,3.10^{-4}} A = 0,1284A$, $\delta_r I = \sqrt{\delta_r^2 m + \delta_r^2 t} = 4,5.10^{-3}$,
$\delta(I) = 0.0006A$
(b) ano, hodnota proudu naměřená ampérmetrem leží v intervalu vypočteného proudu $I \pm \delta I$]

(c) Při měření parametrů hranolu o rozměrech a,b,c pravítkem a hmotnosti m na laboratorních vahách byly získány následující hodnoty: $m = (150.1 \pm 0.2)g$,

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a[mm]	4	5	4	6	3	4	4	5	5	5	6	5
b[mm]	120	121	117	122	120	118	122	123	120	123	119	122
c[mm]	40	41	44	39	38	38	41	44	42	40	39	41

Než začnete počítat, uvědomte si, která veličina byla určena s nejmenší přesností, a tedy bude nejvíce ovlivňovat výslednou chybu. Potom určete aritmetické průměry, směrodatné odchylky a relativní chyby všech provedených měření, určete hustotu kvádru a relativní chybu určení hustoty. Jaká je absolutní chyba určení hustoty? Výsledky rozumně zaokrouhlujte.

$$[\bar{m} = 150.1g,\ \sigma(m) = 0.2g,\ \delta_r m = 0.1\%,$$
$$\bar{a} = 4.7mm \doteq 5mm,\ \bar{b} = 121mm,\ \bar{c} = 41mm,$$
$$\sigma(a) = 0.8mm \doteq 1mm,\ \sigma(b) = 2mm,\ \sigma(c) = 2mm,$$
$$\delta_r a \doteq 25\%,\ \delta_r b = 1.6\%,\ \delta_r c = 5\%,$$
$$\bar{\rho} = 6051kgm^{-3},\ \delta_r \rho = 25.5\%,\ \delta(\rho) = 1546kgm^{-3}\ ]$$

Některé příklady jsou převzaté z publikace

- B. Máca: *Cvičení z fyziky pro nefyzikální obory* (skripta), SPN Praha, 1984