Cvičení z fyziky pro chemiky

Řešení diferenciálních rovnic

1. Napište řešení diferenciální rovnice $\ddot{x} - 3\dot{x} = 0$.

   [kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$;

   řešení diferenciální rovnice: $x(t) = A + B\mathrm{e}^{3t}$]

2. Napište řešení diferenciální rovnice $\ddot{x} + 7\dot{x} - x = 0$.

   [kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{53}+7}{2},\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{53}-7}{2}$;

   řešení diferenciální rovnice: $x(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{53}+7}{2}t} + B\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{53}-7}{2}t}$]

3. Napište řešení diferenciální rovnice $\ddot{x} + 4x = 0$.

   [kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i$;

   řešení diferenciální rovnice: $x(t) = A\mathrm{e}^{-2it} + B\mathrm{e}^{2it}$

   nebo také ve tvaru $x(t) = \bar{A}\sin(2t) + \bar{B}\cos(2t)$]

4. Napište řešení diferenciální rovnice $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$.

   [kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$;

   řešení diferenciální rovnice: $x(t) = A\mathrm{e}^{-t} + Bt\mathrm{e}^{-t}$]

Zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti

1. Malé tělísko vyhodíme ze Země svisle vzhůru počáteční rychlostí $\vec{v}_0$. Do jaké výšky h nad povrchem Země tělísko vystoupí? Odpor vzduchu zanedbáváme. Úlohu řešte užitím kinematických vztahů i užitím zákona zachování mechanické energie.

   [$h = \frac{v_0^2}{2g}$]

2. Malé tělísko vystřelíme šikmo vzhůru pod úhlem α vzhledem k vodorovné rovině počáteční rychlostí $\vec{v}_0$. Do jaké výšky h tělísko vystoupí, je-li odpor vzduchu zanedbatelný? Úlohu řešte užitím kinematických vztahů i užitím zákona zachování mechanické energie.

   [$h = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$]

3. Jakou práci vykonáme, jestliže zvedneme těleso o hmotnosti 2 kg ze Země do výšky 1 m:

   (a) rovnoměrně,

   (b) s konstantním zrychlením 1 m.s^{-2}?

   [(a) $W = mgh$=20 J, (b) $W = (mg + ma)\,h$=22 J]

4. Jakou práci vykonáme, přemístíme-li těleso o hmotnosti 3 kg ve vodorovné rovině umístěné ve výšce 1,5 m nad povrchem Země o 1 m:

(a) rovnoměrně,

(b) s konstantním zrychlením 2 m.s^{-2}?

[(a) $W = 0$ (působící síla je neustále kolmá k elementárnímu posunutí tělesa),

(b) $W = Fs = mas = 6$ J]

5. Koule o hmotnosti m_1, která se pohybuje po vodorovné podložce rychlostí $\vec{v}_1$, narazí do stojící koule o hmotnosti m_2. Ráz koulí je přímý, středový, dokonale pružný, odpor vzduchu zanedbáváme. Určete rychlosti $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ koulí po rázu.

[je-li souřadnicová osa souhlasně rovnoběžná s vektorem $\vec{v}_1$,

jsou složky rychlostí koulí po rázu: $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$]

6. Do stojícího vagónu o hmotnosti 15 tun narazí rychlostí 3,6 km.h^{-1} jiný vagón o hmotnosti 25 tun. Určete rychlosti vagónů po rázu:

(a) za předpokladu, že jde o dokonale pružný ráz,

(b) za předpokladu, že jde o dokonale nepružný ráz.

[(a) užitím výsledků předchozí úlohy: $u_1 = 0{,}9$ km.h^{-1}, $u_2 = 4{,}5$ km.h^{-1},

(b) $u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2{,}3$ km.h^{-1}]

7. Těleso o hmotnosti m_1 pohybující se rychlostí $\vec{v}_1$ po vodorovné podložce se srazí s tělesem o hmotnosti m_2, které bylo v klidu. Nastane přímý nepružný ráz. Odpor prostředí je zanedbatelný. Určete:

(a) kinetickou energii soustavy před rázem,

(b) kinetickou energii soustavy po rázu.

(c) Jaká část původní kinetické energie se přeměnila ve vnitřní energii?

[(a) $E_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2} m v_1^2$, (b) $E_{\mathrm{K2}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) u^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1)^2}{m_1 + m_2}$,

(c) $\Delta E_{\mathrm{K}} = E_{\mathrm{K1}} - E_{\mathrm{K2}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$]

8. Bílá kulečníková koule narazí do červené, která je v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost 3,50 m.s^{-1} a svírá s původním směrem pohybu úhel 22°. Červená koule odletí rychlostí o velikosti 2,00 m.s^{-1}. Určete:

(a) směr rychlosti červené koule po srážce,

(b) počáteční rychlost bílé koule.

(c) Je srážka pružná? Zdůvodněte.

[(a) vektor rychlosti červené koule svírá úhel 41° s původním vektorem

rychlosti bílé koule, (b) $v_{\mathrm{B}} = 4{,}76$ m.s^{-1}, (c) srážka není pružná,

neboť rozdíl kinetické energie před a po srážce je kladný]

9. Malé tělísko o hmotnosti m zavěšené na niti délky l vychýlíme o úhel φ a uvolníme. Jakou rychlostí prochází tělísko rovnovážnou polohou?

[$v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\varphi)}$]

10. Střela o hmotnosti m a neznámé rychlosti $\vec{v}_0$ narazí do bedny s pískem o hmotnosti M, zavěšené na vlákně délky l. Střela v bedně uvízne a soustava „bedna+střela“ se vychýlí o úhel φ (balistické kyvadlo). Určete rychlost střely. Předpokládejte, že počáteční rychlost střely má vodorovný směr, doba trvání rázu je velmi krátká a odpor vzduchu je zanedbatelný. Jaká část původní kinetické energie střely se přeměnila ve vnitřní energii soustavy?

[$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl\,(1-\cos\varphi)},\ p = \frac{\Delta E_\mathrm{K}}{E_\mathrm{K1}} = \frac{E_\mathrm{K1}-E_\mathrm{K2}}{E_\mathrm{K1}} = \frac{M}{m+M}$]

Newtonovy zákony

1. Ve dvojrozměrné přetahované se Aleš, Božena a Cyril přetahují o pneumatiku. Pneumatika je v klidu, přestože na ni působí tři tahové síly. Aleš táhne silou $\vec{F}_\mathrm{A}$ o velikosti 220 N, jejíž vektor svírá se zápornou poloosou x úhel 47°. Cyril táhne silou $\vec{F}_\mathrm{C}$ o velikosti 170 N, jejíž směr neznáme. Jak velkou silou $\vec{F}_\mathrm{B}$ působí na pneumatiku proti směru osy y Božena?

   [$\vec{F}_\mathrm{C}$ svírá s kladnou poloosou x úhel $\alpha = 28°$, $F_\mathrm{B} = 240$ N]

2. Malé tělísko o hmotnosti m je zavěšeno v homogenním tíhovém poli Země na vlákně délky l. Napnuté vlákno i s tělískem vychýlíme o úhel φ a udělíme mu takovou rychlost, že se tělísko pohybuje ve vodorovné rovině (kónické kyvadlo). Jaká je velikost rychlosti tělíska a jaká je velikost tahové síly vlákna? Odpor prostředí zanedbejte.

   [$v = \sqrt{lg\sin\varphi\tan\varphi}$ (směr rychlosti je kolmý ke svislici a k napnutému vláknu), $T = \frac{mg}{\cos\varphi}$]

3. Malé tělísko o hmotnosti m je zavěšeno na vlákně délky l. Napnuté vlákno i s tělískem vychýlíme o úhel φ a uvolníme. Odpor prostředí je zanedbatelný. Jak velkou silou působí vlákno na tělísko při průchodu rovnovážnou polohou?

   [$T = mg\,(3 - 2\cos\varphi)$]

4. Jak velkou rychlost musíme udělit tělísku zavěšenému na niti v rovnovážné poloze, aby se dostalo až do nejvyššího bodu kružnicové trajektorie? Odpor prostředí je zanedbatelný.

   [$v_\mathrm{min} = \sqrt{5gl}$ (návod: výslednice sil v nejvyšší poloze je silou dostředivou; k určení odpovídající rychlosti v nejnižší poloze použijte ZZME]

5. Na vodorovné podložce leží bedna o hmotnosti m. Na bednu působí člověk tahovou silou $\vec{F}$, jejíž vektor svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Jaké je zrychlení bedny, je-li koeficient dynamického tření mezi bednou a podložkou f?

   [$a = \frac{F\cos\alpha - f(mg - F\sin\alpha)}{m}$]

6. Chlapec táhne sáňky o hmotnosti m po zasněženém svahu s úhlem sklonu α. Síla $\vec{F}$, kterou působí na provaz, svírá se svahem úhel φ. Koeficient dynamického tření mezi svahem a sáňkami je f. S jakým zrychlením se sáňky pohybují?

   [$a = \frac{F\cos\varphi - mg\sin\alpha - f(mg\cos\alpha - F\sin\varphi)}{m}$]

Otáčení tuhého tělesa

1. Vypočtěte moment setrvačnosti tenké homogenní tyče o délce l a hmotnosti m vzhledem k ose, která je na ni kolmá a prochází jejím středem.

   [$J = \frac{1}{12} ml^2$]

2. Vypočtěte moment setrvačnosti tenké homogenní čtvercové desky o straně a a hmotnosti m vzhledem k ose, v níž leží jedna z jejích stran.

   [$J = \frac{1}{3} ma^2$]

3. Vypočtěte zrychlení těles m_1, m_2 na Atwodově padostroji (hmotná válcová kladka m, nehmotné vlákno, zanedbatelný odpor prostředí). Jak velké jsou tahové síly ve vláknech?

   [je-li souřadnicová osa orientovaná svisle dolů, jsou složky zrychlení těles: $a_1 = \frac{2(m_1 - m_2)}{2(m_1+m_2)+m}\, g,\ a_2 = -\frac{2(m_1-m_2)}{2(m_1+m_2)+m}\, g$; tahové síly ve vláknech mají velikosti: $T_1 = \frac{4m_2+m}{2(m_1+m_2)+m}\, m_1 g,\ T_2 = \frac{4m_1+m}{2(m_1+m_2)+m}\, m_2 g$]

4. Vypočtěte zrychlení těžiště homogenního válce o hmotnosti m a poloměru r na nakloněné rovině s úhlem sklonu α. Předpokládejte, že válec nepodkluzuje a odpor vzduchu je zanedbatelný. Úlohu řešte užitím pohybových rovnic i užitím zákona zachování mechanické energie. Jaká je velikost třecí síly mezi válcem a nakloněnou rovinou?

   [$a = \frac{2}{3} g \sin\alpha,\ F_{\mathrm{T}} = \frac{1}{3} mg \sin\alpha$]

5. Vypočtěte zrychlení středu homogenní koule o hmotnosti m a poloměru r na nakloněné rovině s úhlem sklonu α. Předpokládejte, že koule nepodkluzuje a odpor vzduchu je zanedbatelný. Úlohu řešte užitím pohybových rovnic i užitím zákona zachování mechanické energie.

   [$a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$]

6. Dvě tělesa o hmotnostech m_1, m_2 na nakloněné rovině s úhlem sklonu α jsou spojena vláknem přes válcovou kladku o poloměru r a hmotnosti m. Vlákno má zanedbatelnou hmotnost, tření a odpor prostředí neuvažujeme. Jaké je zrychlení jednotlivých těles?

   [obě tělesa se pohybují se zrychlením o velikosti $a = \frac{2|m_1 \sin\alpha - m_2|}{2(m_1+m_2)+m}\, g$]

Některé příklady jsou převzaty z publikací:

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika.* Prometheus, Praha 2000.
- V. Navrátil, B. Máca: *Cvičení z obecné fyziky I.* (skripta). Masarykova univerzita, Brno 1992.