Cvičení z fyziky pro chemiky

Symbolem * je označen obtížnější příklad, který možná nezvládnete bez pomoci vyřešit, ale rozhodně se zamyslete nad interpretací uvedených výsledků.

Vlastní kmity

1. Částice koná lineární harmonický pohyb kolem bodu $x = 0$m. V čase $t = 0$s má nulovou rychlost a její výchylka je $3.7.10^{-3}$m. Je-li frekvence pohybu $f = 0.25\text{s}^{-1}$, najděte

   (a) periodu,

   (b) kruhovou frekvenci,

   (c) amplitudu,

   (d) výchylku a rychlost v libovolném čase t,

   (e) amplitudu rychlosti a amplitudu zrychlení.

   [(a) T=4s, (b) $\omega = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$, (c) A=$3.7.10^{-3}$m, (d) x=$3.7.10^{-3}\cos\frac{\pi}{2}$t m, (e)$v_m$=$1.85\pi.10^{-3}\text{ms}^{-1}$, a_m=$9.25.10^{-3}.\pi^2\text{ms}^{-2}$.]

2. Dokažte, že zápisy $x_1 = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ a $x_2 = C\sin(\omega t + \varphi)$ jsou ekvivalentní, vyjádřete C a φ pomocí A a B a také A a B pomocí C a φ. Návod: Užijte vztah $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ a uvědomte si, že rovnost zápisů x_1 a x_2 musí platit nezávisle na čase.

   [$A = C\cos\varphi$, $B = C\sin\varphi$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\text{tg}\varphi = \frac{B}{A}$.]

3. Určete amplitudu a fázovou konstantu netlumeného harmonického pohybu po přímce. Hmotný bod měl v čase $t = 0s$ výchylku $x_0 = 5$cm a rychlost $v_0 = 20\ \text{cms}^{-1}$, jeho frekvence byla $f = 1\text{s}^{-1}$.

   [$A = 5,92$cm, $\alpha = -32°30'$]

4. Napište pohybové rovnice a určete úhlovou frekvenci vlastních kmitů tělesa o hmotnosti m visícího na pružině o tuhosti k. Předpokládejte, že těleso koná harmonický kmitavý pohyb ve směru osy x.

   [$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$]

5. * Napište pohybové rovnice a určete úhlovou frekvenci fyzického kyvadla (těleso o hmotnosti m otáčející se kolem osy neprocházející těžištěm). Tutéž úlohu řešte pro matematické kyvadlo (hmotný bod na nehmotném závěsu).

   [fyzické kyvadlo $J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mdg\sin\varphi = 0$, kde J je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení, d je vzdálenost osy otáčení od těžiště, g je tíhové zrychlení a φ je úhel určující výchylku z rovnovážné polohy. Uvažujeme-li malé kmity ($\sin\varphi \doteq \varphi$), je úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$. Uvažujeme-li o matematickém kyvadle jako o speciálním případu fyzického kyvadla s momentem setrvačnosti $J = md^2$, je úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$.]

6. V U-trubici je homogenní kapalina. Pomocí pístu umístěného v jednom rameni U-trubice posune kapalinové těleso o vzdálenost x. Ukažte, že po uvolnění pístu začne kapalina vykonávat jednoduché harmonické kmity a určete jejich periodu. Celková délka kapalinového sloupce v trubici je L. [$T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$]

7. V čase $t = 0$s je výchylka částice $x_0 = 4.3$cm a její rychlost $v_0 = 3.2\text{ms}^{-1}$. Hmotnost částice je m=4 kg a její celková energie je E=79.5 J. Napište vztah pro závislost výchylky částice na čase a vypočtěte dráhu částice za dobu 0.4s od začátku pohybu.

[$x = 0.05\cos\left(126.1t + \frac{\pi}{6}\right)m,\ s = 1.6m$]

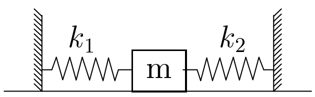
8. Určete periodu malých podélných kmitů tělesa o hmotnosti m v soustavě znázorněné na Obr. 1. Tuhosti nehmotných pružin jsou k_1 a k_2, tření zanedbejte.

[$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$]

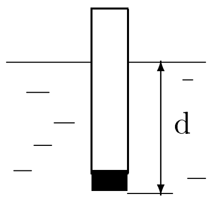
9. Dřevěný válcový kůl je na jednom konci zatížen olovem, takže může plavat ve svislé poloze (Obr. 2). Kůl uvedeme do kmitavého pohybu ve svislém směru. Ukažte, že se jedná o jednoduché harmonické kmity a určete jejich periodu. Neberte v úvahu, že dochází ke tlumení kmitů. [$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$]

10. K nehmotné pružině o tuhosti $k = 50\text{Nm}^{-1}$ je přívázána nit, na které visí závaží o hmotnosti 1kg (Obr. 3). O jakou vzdálenost lze posunout závaží směrem dolů, aby po jeho uvolnění vznikly kmity, v jejichž průběhu by bylo vlákno stále napjaté?

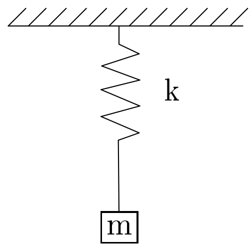
[$x \leq \frac{mg}{k} = 19.6$cm]



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

11. * Homogenní tenká tyč o hmotnosti M a délce L je připevněna ke stropu tak, že se může volně otáčet bez tření kolem osy O (viz Obr. 4). Tyč je kromě toho připevněna ke stěně pomocí pružiny o tuhosti k. Určete periodu kmitů tyče. Návod: Postupujte obdobně jako při odvození periody kmitů fyzického kyvadla, k momentu tíhové síly přičtěte moment síly pružné.

[$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{ML}{Mg+2k}}$]

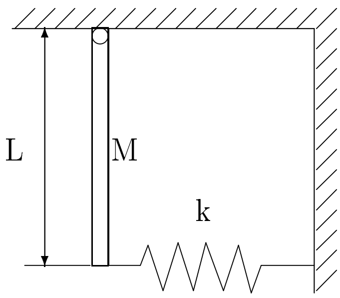
12. Na vodorovné pružině zanedbatelné hmotnosti je připevněn tuhý válec o hmotnosti m, který se může valit bez klouzání po vodorovné rovině. Tuhost pružiny je $k = 3.0\text{Nm}^{-1}$ (viz Obr. 5). Válec vychýlíme z rovnovážné polohy o $d = 0.25$m a uvolníme jej.

(a) Vypočtěte kinetickou energii rotačního a translačního pohybu válce při průchodu rovnovážnou polohou.

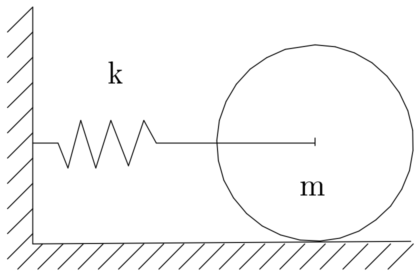
(b) * Ukažte, že střed hmotnosti válce koná jednoduchý harmonický pohyb s periodou $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$. [(a) $E_{tr}(0) = \frac{1}{3}kd^2 = 0.0625J$, $E_{rot}(0) = \frac{1}{6}kd^2 = 0.0313J$]

13. * Na misku o hmotnosti M, zavěšenou na pružině s konstantní tuhostí k, dopadne z výšky h kulička o hmotnosti m a zůstane na misce ležet (viz Obr. 6). Tento systém začne vykonávat kmitavý pohyb. Najděte amplitudu kmitů soustavy.

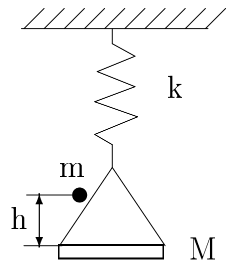
[$A = \sqrt{\frac{m^2g^2}{K^2} + \frac{2m^2gh}{k(m+M)}}$]



Obr. 4



Obr. 5



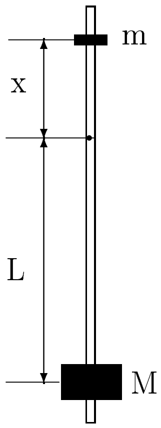
Obr. 6

14. * Kyvadlo metronomu je lehká tyčinka, na jejímž konci je ve vzdálenosti L od osy otáčení umístěno tělísko o hmotnosti M. Na druhém konci kyvadla je ve vzdálenosti x od osy umístěno posuvné tělísko o hmotnosti m, pomocí kterého lze měnit frekvenci kyvadla (viz Obr. 7). Najděte vztah pro kruhovou frekvenci metronomu za předpokladu, že hmotnosti tělísek M a m jsou bodové a hmotnost tyčinky je zanedbatelná.

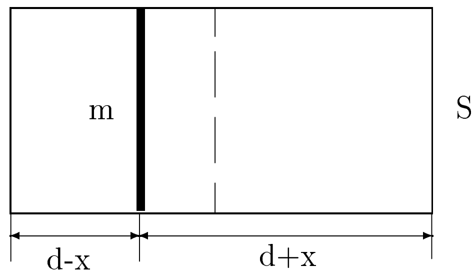
[$\omega = \sqrt{\frac{g(ML-mx)}{ML^2+mx^2}}$]

15. * V uzavřeném válci naplněném vzduchem je píst o hmostnosti m, který rozděluje válec na dvě stejné části. Tlak vzduchu v obou částech je p_0. Píst nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy o vzdálenost x a potom uvolníme (viz Obr. 8). Píst začne vykonávat kmitavý pohyb. Vypočtěte periodu kmitů za předpokladu, že děj v plynu můžeme považovat za a) izotermický b) adiabatický. Poznámka: pokuste se odvodit alespoň pohybové rovnice a) $m\frac{d^2x}{dt^2} + Sp_0\left(\frac{d}{d-x} - \frac{d}{d+x}\right) = 0$, b) $m\frac{d^2x}{dt^2} + Sp_0\left(\left(\frac{d}{d-x}\right)^\kappa - \left(\frac{d}{d+x}\right)^\kappa\right) = 0$, kde κ je Poissonova konstanta z rovnice pro adiabatický děj, zbytek je otázkou vhodné matematické aproximace pro malé kmity.

[a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{md}{2p_0S}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{md}{2\kappa p_0S}}$]



Obr. 7



Obr. 8

Tlumené a nucené kmity

1. * Odvoďte rovnice nuceného kmitání pro kuličku zavěšenou na pružině. Kulička je ponořena do kapaliny, a tedy tlumena. Předpokládejte, že odporová síla je tvaru $\vec{F}_{od} = -6\pi\eta r\vec{v}$ (Stokesův vztah) a vynucující síla je harmonická, $\vec{F}_v = F\sin\Omega t$. Určete frekvenci a amplitudu vlastních i vynucených kmitů. Pro jaké hodnoty parametrů soustavy dochází k rezonanci? Poznámka: výsledky tohoto příkladu využijte k řešení následujících úloh.

   [$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = g\left(1 - \frac{\rho_{kap}}{\rho_{kul}}\right) - \frac{F}{m}\sin\Omega t$, kde $b = \frac{3\pi\eta r}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, frekvence vlastních kmitů je $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}$, amplituda Ae^{-bt}, frekvence vynucených kmitů je Ω, jejich amplituda je $A_v = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2-4b^2\Omega^2}}$, k rezonanci dojde pro frekvenci vynucující síly $\Omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2b^2}$]

2. Při pozorování tlumeného harmonického pohybu bylo zjištěno, že po dvou po sobě následujících výchylkách na tutéž stranu se amplituda kmitů zmenšila o 0.6 a že doba tlumených kmitů je T=0.5s. Určete:

   (a) Konstantu útlumu a frekvenci netlumených kmitů, které by mohly probíhat za jinak stejných podmínek, tj. při b=0.

   (b) Činitele jakosti tohoto oscilátoru, který je definován jako $Q = \frac{\omega}{2b}$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$.

   [(a) b=1.83 s^{-1}, f_0=2.02s^{-1}, (b) Q=3.43]

3. Počáteční amplituda kmitavého pohybu kyvadla je $A_0 = 3$cm. Za dobu $t_1 = 10$s je amplituda již jen $A_1 = 1$cm. Za jak dlouho bude amplituda $A_2 = 0.3$cm?

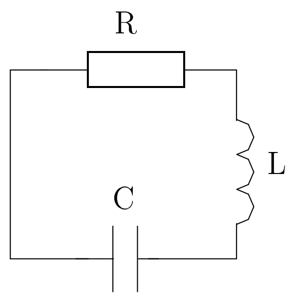
   [$t_2 = t_1\frac{\ln A_0 - \ln A_2}{\ln A_0 - \ln A_1} = 20.96$s]

4. Jaká je rezonanční amplituda a rezonanční frekvence hmotného bodu, který koná vynucené kmity, znáte-li tyto údaje: Hmotnost bodu je m=0.1kg, kruhová frekvence vlastních kmitů je ω_0=20s^{-1}, koeficient útlumu $b = 3s^{-1}$ a amplituda vynucující síly F_0 = 10N. Návod: použijte výše uvedeného vztahu pro pro frekvenci rezonančních kmitů $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$ a dosaďte jej do vztahu pro amplitudu vynucených kmitů A_v.

[$A_r = 84.3cm\ \omega_r = 19.54s^{-1}$]

5. Těleso o hmotnosti m=0.2kg koná vynucené harmonické kmity působením sinusově proměnné síly, jejíž amplituda je $F_0 = 2N$. Určete rezonanční kruhovou frekvenci ω_r a rezonanční amplitudu A_r, je-li doba vlastního kmitání tělesa $T_0 = \frac{\pi}{4}$ a koeficient útlumu $b = 4s^{-1}$.
[$A_r = 0.18m\ \omega_r = 5.7s^{-1}$]

6. * Kondenzátor o kapacitě $C = 0.025\mu F$, který je nabit na potenciální rozdíl $U = 20V$, je vybíjen přes vodič o indukčnosti $L = 4\mu H$. Odpor obvodu je $R = 1\Omega$. Vypočtěte kruhovou frekvenci vlastních kmitů obvodu.
[$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 3.16.10^6 s^{-1}$]



Obr. 10

Skládání kmitů

1. * Odvoďte obecně vztah pro výslednou amplitudu a fázový posuv kmitání, které vznikne složením dvou stejnosměrných kmitů o stejné frekvenci, amplitudách A_1 a A_2 a fázích φ_1 a φ_2. Návod: Postupujte obdobně jako v příkladu 2. z odstavce Vlastní kmity.

[$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_2)}$, tg$\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$]

2. Určete amplitudu výsledného harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných kmitů se stejnou periodou a amplitudami 3 a 5cm. Rozdíl jejich fází je 60°.
[A=7cm]

3. Jaký pohyb vznikne superpozicí dvou rovnoběžných harmonických kmitů se stejnými kruhovými frekvencemi ω, jsou-li amplitudy jednotlivých kmitů $A_1 = 1cm$ a $A_2 = 10cm$. Příslušné fázové konstanty jsou $\varphi_1 = 30°$ a $\varphi_2 = 60°$.
[A=10.8cm, tg$\varphi = 1.54$, $\varphi = 57°$]

4. * Proveďte superpozici dvou navzájem kolmých harmonických kmitů se stejnými periodami a amplitudami ($T_1 = T_2 = 0.1s$, $A_1 = A_2 = 2cm$). Uvažujte následující hodnoty počátečních fází:

   (a) obecné hodnoty φ_1 a φ_2, přitom $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

   (b) $\varphi_1 = \pm\varphi_2$.

   (c) $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

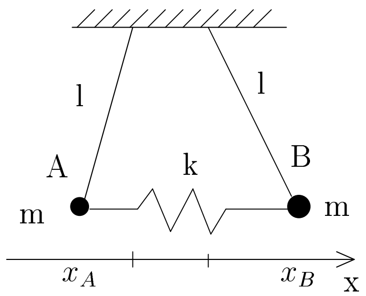
   Návod: Vztahy pro výchylky podělte příslušnou amplitudou, funkce sinus pak rozložte podle vztahů pro $\sin(\alpha + \beta)$, obě rovnice umocněte na druhou a sečtěte.

   [(a) Rovnice výsledné dráhy je rovnice elipsy $x^2 + y^2 - 2xy\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 4\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$. (b) Harmonický pohyb po přímce $y = \pm x$ s amplitudou $A = 4cm$ (c) Harmonický pohyb po kružnici o poloměru $R = 2cm$ $x^2 + y^2 = 4$.]

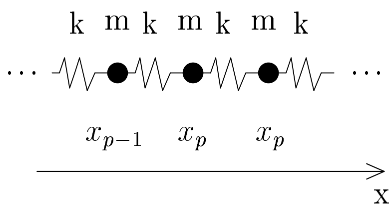
Oscilátory s vazbou

1. * Odvoďte vztah pro okamžitou výchylku p-té kuličky systému na Obrázku 14, určete vlastní frekvence systému N kuliček a počet těchto kmitových módů (kmity se konají podél osy x). Okrajová podmínka: nultá a N+1 kulička mají v libovolném čase nulovou výchylku. Návod: U tohoto a následujících příkladů postupujte obdobně jako u podobného příkladu řešeného na přednášce.

   [pohybová rovnice $m\frac{d^2x_p}{dt^2} = k(x_{p-1} + x_{p+1} - 2x_p)$, její řešení je tvaru $x_p = A\sin(p\Theta + \Phi)\sin(\omega t + \varphi)$, po aplikaci okrajových podmínek dostaneme pro výchylku $x_p = A\sin(p\frac{m\pi}{N+1})\sin(\omega_m t + \varphi)$ a pro vlastní frekvence vztahy $\omega_m = 2\omega_0 \sin\frac{m\pi}{2(N+1)}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, těchto frekvencí je nejvýše N.]



Obr. 13



Obr. 14

2. * Napište pohybové rovnice pro kmity soustavy dvou spřažených kyvadel (viz Obrázek 13), určete kmitové módy soustavy.

$$[m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_A - k(x_A - x_B)$$
$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_B - k(x_B - x_A),$$

kde x_A (x_B) značí výchylku kuličky A (B) z její rovnovážné polohy. Vlastní kmitové módy jsou $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\omega' = \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{m}\right)^2}$]

3. * Homogenní struna délky 2.5m a hmotnosti 0.01kg je napjata silou 10N.

   (a) Najděte frekvenci jejího nejnižšího módu.

   (b) Jestliže strunu vychýlíme příčně a v místě vzdáleném 0.5m od jednoho konce se jí dotkneme, jaká frekvence zní v tomto případě?

   [pro výchylku struny platí $y(x,t) = A \sin\left(\frac{\omega_m x}{v}\right) \sin(\omega_m t)$, kde $\omega_m = m\omega_1$, $\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{Fl}{m}}$, tedy (a) $f_1 = 10Hz$, (b)n=5m, tedy jsou povoleny frekvence 50Hz, 100 Hz, 150 Hz,...]

Některé příklady jsou převzaty z publikací

- Janča J., Kapička V., Kučírek J., Stejskalová V., *Cvičení z obecné fyziky III a IV*, SPN Praha 1986
- Máca B., *Cvičení z fyziky pro nefyzikální obory*, SPN Praha 1988