1. Specialisté francouzské společnosti CEA-Leti a národního polytechnického institutu v Grenoblu pracují ve společném inovačním centru Minatec a provádějí zkoušky svého zařízení, které dokáže vyrábět energii z dešťových kapek. Motivace je zvýšit energetickou nezávislost "mikrosystémů" [1], která je bez dodatečných zdrojů omezena výdrží baterie.

   Princip je následující - dopad kapky na speciální (piezoelektrickou) vrstvu vyvolá mechanické vlnění díky němuž lze generovat elektrický proud [1].

   Uvedené může vést k zamyšlení nad tím, kolik (mechanické) energie déšť obsahuje.

   Uvažujme bouřkový mrak ve výšce $H = 1\text{km}$ nad zemí [2], ze kterého během bouřky naprší za čas $\tau = 3\text{hodiny}$ $h = 171\text{mm}$ vodního sloupce [3]. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny kapky vznikly v téže výšce H, měly stejný poloměr $R = 2\text{mm}$ [4], padaly svisle a při dopadu předaly veškerou svou kinetickou energii zemi.

   Nalezněte odpovědi na následující úkoly

   (a) Jaký je střední výkon deště na jednotkovou plochu ("intenzita") $S = 1\text{m}^2$ při zanedbání odporu, který vzduch klade padajícím kapkám?

   (b) Totéž v odporovém prostředí s odporovou sílu $F_{\text{odp.}} \propto v^2$ (Newtonův vztah). Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny kapky dopadnou s maximální rychlostí, jakou mohou při pádu v odporovém prostředí dosáhnout. Její vyjádření lze nalézt úvahou z 2. Newtonova zákona pro padající kapku.

   Nápověda: Maximální rychlost lze nalézt matematicky jako extrém funkce $\vec{v}(t)$. Jaká je podmínka extrému a jak se projeví v 2. Newtonově zákonu?

   (c) Z případu 1b plyne, že střední intenzita (tj. i kinetická energie při dopadu) roste s poloměrem kapky. Ale odporová síla také roste s rostoucím R, takže by se dalo čekat, že větší kapka dopadne naopak s menší rychlostí než kapka menší. Vysvětlete tento (zdánlivý) nesoulad.

   (d) Až doposud řešení nezahrnovalo (nebo přinejmenším nemuselo zahrnovat) explicitní řešení pohybových rovnic. Jednalo se o poměrně snadno získatelné odhady - bez odporu a dopad mezní rychlostí v odporovém prostředí.

   Exaktnějším přístupem - řešením pohybových rovnic - zjistíme, že mezi výškou nad zemí x a velikostí rychlosti padající kapky v platí vztah

$$v(x) = \underbrace{\sqrt{gK^{-1}}}_{v_{\text{max.}}} \underbrace{\left[1 - \exp\left(-2K[H-x]\right)\right]^{1/2}}_{\leq 1},\ x(t=0) = H,\ v(t=0) = 0, \qquad (1)$$

   s uvedenými počátečními podmínkami. K je konstanta, která souvisí s odporovou silou (určíte ji v 1b).

   Na základě vzorce (1) ověřte nakolik je splněn předpoklad v bodu 1b o dopadu maximální rychlosti. Za míru (ne)splnění předpokladu berte relativní odchylku rychlosti skutečné od maximální, tj. $\dfrac{v_{\text{max.}} - v(x=0)}{v_{\text{max.}}}$.

   Nápověda: Bude-li záporný člen pod odmocninou ve vzorci (1) příliš malý, pro odhad $v(x = 0)$ lze použit Taylorova rozvoje odmocniny do prvního řádu.

[1] Může se jednat například o automatické měřící stanice v odlehlých oblastech bez přístupu k elektrické síti, kde není vhodné získávat energii z prostředí jiným způsobem, třebas pomocí solárních panelů.

Pro snadnější porozumění výsledku jej vyjádřete pomocí obvyklejších mocnin desíti namísto exponenciály se základem e. K tomu může posloužit vzoreček

$$\mathrm{e}^x = a^{x \log_a \mathrm{e}}, \ \log_a x \equiv \frac{\ln x}{\ln a}, \ \forall a \in (0, \infty).$$

(e) Sestavte mechanickou energii padající kapky s užitím rovnice (1) a dokažte, že se obecně nezachovává. Víte-li, že se nezachovává, určete na základě sestaveného vzorce, jak se mění v čase - tj. zda roste, či klesá. Pro tento účel spočtěte časovou derivaci mechanické energie, $\mathrm{d}E_{\text{mech.}}/\mathrm{d}t$, a určete její znaménko.

Určete limitu odpovídající "vypnutí" odporu prostředí (tj. $K \to 0$). Jaký je výsledek (mechanická energie)? Překvapuje vás jeho hodnota?

(f) Předpoklad stoprocentní účinnosti, tj. předání veškeré kinetické energie kapky zemi je chybný, protože se jedná o nepružnou srážku, kdy se zachovává hybnost soustavy a nikoliv mechanická energie. Navíc část energie bude předána molekulám vzduchu vybuzením zvukového signálu při dopadu kapky.

Víte-li že hladina intenzity zvuku silného deště je [5] $B = 70\mathrm{dB}$ [2], určete kolik procent celkové intenzity spočítané v bodě 1a a 1b se převede na zvukový signál.

(g) Průměrné roční srážky na území České republiky jsou (dlouhodobý normál) 673mm vodního sloupce [6]. Na základě této hodnoty odhadněte celkovou roční energii dopadajícího deště se započtením vlivu odporu atmosféry.

Příklad 1d ukazuje, že energie dopadlé kapky - se zahrnutím odporu prostředí - není příliš ovlivněna tím v jaké výšce se mrak nachází. Podstatný je tedy hlavně poloměr kapek; při výpočtu dosazujte stejnou hodnotu jako ve zbytku příkladu.

Srovnejte se spotřebou elektrické energie v celé České republice, přibližně 60TWh [7].

Poznámka: Jinou neméně (za)jímavou úlohou by mohlo být posoudit využitelnost vodní energie pomocí vodních elektráren situovaných na přehradách.

2. Prah slyšení je dán hodnotou intenzity $I = 10^{-12}\mathrm{Wm}^{-2}$ (0dB). S pomocí rovnice (2) převeďte na amplitudu tlakových oscilací ve vzduchu, berte $Z_{\text{vzd.}} = 400\mathrm{Pa\ s\ m}^{-1}$. Srovnejte s $p_{\text{atm.}} = 10^5\mathrm{Pa}$ (atmosferický tlak) a s hodnotou $\Delta\, p_{\text{therm.}} = 5 \times 10^{-6}\mathrm{Pa}$ (řádově odpovídá náhodným výkyvům tlaku v důsledku náhodného teplotního pohybu).

Jsou tlakové oscilace malé? Zopakujte tuto analýzu pro práh bolesti (120dB) [8].

$$I(t) = p(t)v(t) \Rightarrow \langle I \rangle = \frac{1}{2} p_0 v_0 = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{Z}, \tag{2}$$

kde veličina Z se nazývá akustická impedance.

Vysvětlete, jak se získají první dva vztahy ("platnost rovnítek") v rovnici (2), pro intenzitu I a její střední časovou hodnotu $\langle I \rangle$, uvažujeme-li harmonické kmitání molekul vzduchu.

3. Aorta v lidském těle má průřez $S_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{cm}^2$ a krev o hustotě $\rho = 1060\mathrm{kgm}^{-3}$ jí protéká rychlostí $v = 0.4\mathrm{ms}^{-1}$ [9].

(a) Aneurisma je abnormální rozšíření tepny či cévy, např. aorty. Uvažujme, že v důsledku aneurisma se průřez aorty zvýšil 1.7-krát. Předpokládejme, že aorta je horizontální (uvažovaná osoba leží), určete jak se změní tlak v rozšířené části ve srovnání s částí úzkou.

[2]Význam hodnoty je následující: Nacházíme-li se uvnitř oblasti, kde prší, déšť lze považovat za plošný zvukový zdroj. Proto v uvedeném údaji nefiguruje vzdálenost od zdroje vlnění.

(b) Uvažujme, že aorta (respektive její zdravá část) se rozvětví do desítek tisíc kapilár, jejichž souhrnný průřez je přibližně $0.28\mathrm{m}^2$. Odhadněte průměrnou rychlost krve v kapiláře.

4. Červenou krvinku lze modelovat jako kulový kondenzátor - kladně nabitá sféra o povrchu S, oddělená membránou tloušťky d od okolí, záporně nabité kapaliny [9].

   Měření velmi malými elektrodami ukazují, že při přechodu přes membránu se změní potenciál o 0.1V. Tloušťka membrány je přibližně $d = 100\mathrm{nm}$ a její dielektrická konstanta je $\varepsilon_{\mathrm{rel.}} = 5$.

   (a) Je-li průměrná hmotnost červené krvinky $10^{-12}\mathrm{kg}$, odhadněte objem buňky a odtud její plochu. I nadále považujte buňku za těleso tvaru koule. Hustota krve je $\rho = 1060\mathrm{kgm}^{-3}$. Při výpočtu uvažujte, že hustota krevní plazmy (55% krve) je blízká hustotě buněk (45% krve).
   (b) Odhadněte kapacitu buňky.
   (c) Spočítejte povrchový náboj membrány. Kolik je to základních nábojů $|e|$?

5. Jedna z analytických metod sloužící k určení složení vzorků je hmotový spektrometr, který využívá působení elektromagnetického pole na nabité částice.

   Nejprve jsou ze vzorku získány ionty, které po urychlení elektrickým polem intenzity $\vec{E}$ vstupují do komory s magnetickým polem o indukci $\vec{B}$. Magnetické pole zakřivuje trajektorii iontů. Vhodným nastavením hodnot E a B se na detektor dostanou právě určité ionty.

   Uvažujme zjednodušený popis hmotového spektrometru: Ionty urychlené elektrickým polem vstupují do komory kolmo k magnetickému poli, viz. Obrázek 1.

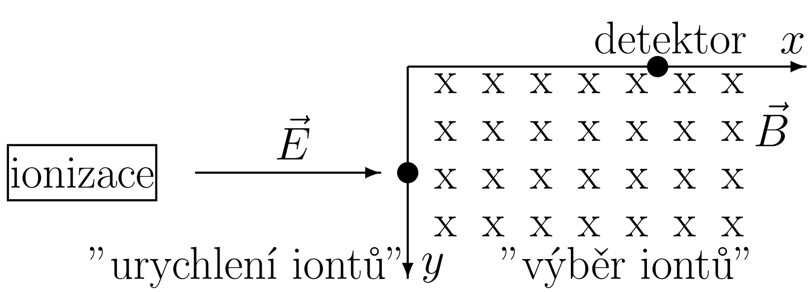
   Vyberme iont, náboj q a hmotnost m, urychlený elektrickým polem E. Určete magnetické pole B tak, aby iont *vstupující* do magnetické komory v místě $(0, y_{\mathrm{v}})$ jak je naznačeno na Obrázku 1 dopadl na *detektor* o souřadnicích $(x_{\mathrm{d}}, 0)$.

   Řešení rozdělte na následující části

   (a) Vzhledem k volbě orientace magnetického pole na Obrázku 1 (vstupuje do roviny xy zvrchu a vystupuje vespod), pro jaké znaménko vybraného iontu budete problém řešit?
   (b) Uvažujte $y_{\mathrm{v}} > 0$ a hybnost iontu rovnoběžnou s osou x, viz. Obrázek 1.
   (c) Řešte také pro $y_{\mathrm{v}} = 0$ a hybnost iontu rovnoběžnou s osou y.

   V případech 5b a 5c schématicky zakreslete trajektorii uvažovaného iontu.

Obrázek 1: Hmotový spektrometr, zjednodušené schéma



Nápověda: Iont se v magnetickém poli pohybuje po kružnici. S pomocí nástrojů analytické geometrie je tedy úloha snadno řešitelná. Vyjděte z obecné rovnice kružnice a tuto konkretizujte požadavkem, aby bod vstupu a detektor se na ní nacházely. Může být užitečné se zamyslet nad tím, kde se nachází střed kružnice.

Poznámka: Ve skutečné situaci není/ nemusí být splněno, že rychlost vstupujících iontů je rovnoběžná s osou x a problém je tedy mnohem složitější - svazek iontů je nutno navíc fokusovat.

Reference

[1] Viz odkaz na *http://ideje.cz/cz/clanky/energie-z-kapek-deste* s následujícími referencemi
Romain Guigon et al: "Harvesting raindrop energy: theory" (2008) *Smart Mater. Struct.* 17 015038
Romain Guigon et al: "Harvesting raindrop energy: experimental study" (2008) *Smart Mater. Struct.* 17 015039

[2] *CUMULONIMBUS, bouřkový oblak (0,5 až 13 km)*: Je to do velké výšky vyvinutý hustý mohutný mrak, podobající se svou strukturou Cumulusu. Jeho základna bývá posazena do výšky třeba jen půl kilometru nad zemí, zatímco vrchol může dosáhnout až 13 kilometrů... Cumulonimbus je v dolní části složen z vodních kapiček, v horní části z ledových krystalů. Tento mrak může obsahovat ale i velké dešťové kapky, sněhové vločky krupky či kroupy. Je zdrojem dešťových a sněhových srážek, bouřek a lijáků [*http://www.vimevic.cz/vzdelani/mraky.htm*].

[3] Srážky v mm vodního sloupce vyjadřují počet litrů spadený na plochu $S = 1\mathrm{m}^2$ za určitý časový interval. Celkový objem dopadnuté vody je

$$V = hS = h[\mathrm{mm}]S[\mathrm{m}^2] \times 10^{-3}\mathrm{m}^3 = h[\mathrm{mm}]S[\mathrm{m}^2]\,\text{litrů}$$

[*http://www.meteocentrum.cz/encyklopedie/atmosfericke-srazky.php*].

Konkrétní čísla odpovídající přívalovým dešťům inspirována daty z *http://meteoblog.meteopress.cz/?p=1059*

[4] Velikost kapky je omezena shora mezí cca. $R \doteq 2\mathrm{mm}$, pravděpodobně díky stabilitě - aby se padající kapka nerozpadla. Viz. *http://hypertextbook.com/facts/2001/IgorVolynets.shtml*

[5] Viz. například *http://www.veronica.cz/ucastverejnosti/vliv_hluku_na_cloveka.pdf*

[6] Viz. například *http://www.chmi.cz/meteo/ok/infklim.html* a odtud rok 2008

[7] Viz. Ministerstvo průmyslu a obchodu, internetové stránky [*http://www.mpo.cz/dokument11762.html*], v .pdf příloze je udáno, že roční spotřeba za rok 2005 činí brutto 69944.8GWh a netto 57664.2GWh.

[8] R.K. Hobbie, B.J. Roth: Intermediate Physics for Medicine and Biology, 4th Edition (2007) Springer

[9] R. J. Ingebretsen: The Physics of the Human Body, Companion Manual [učební pomůcka ke kursu na University of Utah]

[10] Paul Davidovits: Physics in Biology and Medicine, 3rd Edition (2008) Elsevier

Všechny internetové odkazy byly funkční k datu umístění příkladů na síť Přírodovědecké fakulty Masarykovy University.