Cvičení – Kmity, vlny, optika

přednášející: Zdeněk Bochníček

Tento text obsahuje příklady ke cvičení k předmětu F3100 Kmity, vlny, optika. Příklady jsou rozděleny do bloků, které přibližně odpovídají tomu, jak jsou jednotlivá témata řešena ve cvičení. Studenti kombinovaného studia jsou povinni vypracovat pět příkladů z každého bloku, který prezenčně nenavštívili. Povinné příklady jsou v textu označeny symbolem •. Ostatní příklady mohou sloužit k procvičení.

Reference

[1] Halliday D., Resnick R., Walker J., *Fyzika, část 2*, VUTIUM a Prometheus, Brno, Praha 2000

[2] Janča J., Kapička V., Kučírek J., Stejskalová V., *Cvičení z obecné fyziky III a IV*, SPN Praha 1986

[3] Máca B., *Cvičení z fyziky pro nefyzikální obory*, SPN Praha 1988

[4] Syrový A., *Sbírka příkladů z fyziky*, SNTL Praha 1971

1 Harmonické kmity I

1. • [2] 1.1 Částice koná lineární harmonický pohyb kolem bodu $x = 0$m. V čase $t = 0$s má nulovou rychlost a její výchylka je 3,7·10^{-3}m. Je-li frekvence pohybu $f = 0.25\text{s}^{-1}$, najděte

   (a) periodu,

   (b) kruhovou frekvenci,

   (c) amplitudu,

   (d) výchylku a rychlost v libovolném čase t,

   (e) amplitudu rychlosti a amplitudu zrychlení.

   [(a) $T = 4$s, (b) $\omega = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$, (c) $A = 3.7.10^{-3}$m, (d) $x = 3.7.10^{-3}\cos\frac{\pi}{2}tm$, (e)$v_m$=1.85$\pi$.10^{-3}ms^{-1}, a_m=9.25.10^{-3}.π^2ms^{-2}.]

2. • [3] 7.3 Určete amplitudu a fázovou konstantu netlumeného harmonického pohybu po přímce. Hmotný bod měl v čase $t = 0.0s$ výchylku $x_0 = 5.0$cm a rychlost $v_0 = 20$ cms^{-1}, jeho frekvence byla $f = 1.0\text{s}^{-1}$.

   [$A = 5,92$cm, $\alpha = -32°30'$]

3. • Napište pohybové rovnice a určete úhlovou frekvenci fyzického kyvadla (těleso o hmotnosti m otáčející se kolem osy neprocházející těžištěm). Tutéž úlohu řešte pro matematické kyvadlo (hmotný bod na nehmotném závěsu).

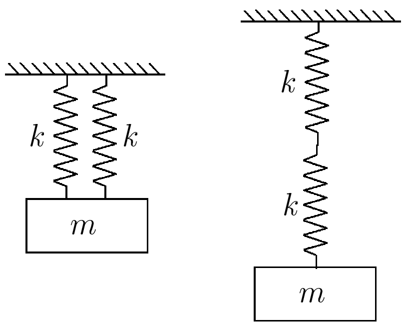
[fyzické kyvadlo $J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mdg\sin\varphi = 0$, kde J je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení, d je vzdálenost osy otáčení od těžiště, g je tíhové zrychlení a φ je úhel určující výchylku z rovnovážné polohy. Uvažujeme-li malé kmity ($\sin\varphi \doteq \varphi$), je úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$. Uvažujeme-li o matematickém kyvadle jako o speciálním případu fyzického kyvadla s momentem setrvačnosti $J = md^2$, je úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$.]

4. • [2] 1.6 V U-trubici je homogenní kapalina. Pomocí pístu umístěného v jednom rameni U-trubice posune kapalinové těleso o vzdálenost x. Ukažte, že po uvolnění pístu začne kapalina vykonávat jednoduché harmonické kmity a určete jejich periodu. Celková délka kapalinového sloupce v trubici je L.

[$T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$]

5. • Těleso hmotnosti m zavěsíme na dvě pružiny zanedbatelné hmotnosti, stejné délky a tuhosti k. V prvním případě pružiny zapojíme paralelně (viz obr. a) a ve druhém sériově (obr. b). Určete poměr period kmitů obou soustav. Tření zanedbejte.

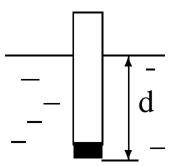
[$\frac{T_1}{T_2} = 2$, obecně $T_1 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$]



a) b)

6. [2] 1.7 Dřevěný válcový kůl, jehož délka je mnohem větší než poloměr, je na jednom konci zatížen olovem, takže může plavat ve svislé poloze (viz obrázek). Kůl uvedeme do kmitavého pohybu ve svislém směru. Ukažte, že se jedná o jednoduché harmonické kmity a určete jejich periodu. Neberte v úvahu, že dochází ke tlumení kmitů.

[$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$]



7. Napište pohybové rovnice a určete úhlovou frekvenci vlastních kmitů tělesa o hmostnosti m vysícího na pružině o tuhosti k. Předpokládejte, že těleso koná harmonický kmitavý pohyb ve směru osy x.

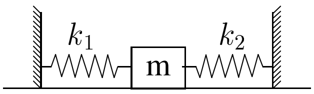
[$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$]

8. [2] 1.2 V čase $t = 0$s je výchylka částice $x_0 = 4.3$cm a její rychlost $v_0 = 3.2\text{ms}^{-1}$. Hmotnost částice je m=4 kg a její celková energie je E=79.5 J. Napište vztah pro závislost výchylky částice na čase a vypočtěte dráhu částice za dobu 0.40s od začátku pohybu.

$$[x = 0.05\cos\left(126t + \frac{\pi}{6}\right)m,\ s = 1.6m]$$

9. [2] 1.3 Určete periodu malých podélných kmitů tělesa o hmostnosti m v soustavě znázorněné na obrázku. Tuhosti nehmotných pružin jsou k_1 a k_2, tření zanedbejte.

$$[T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}]$$



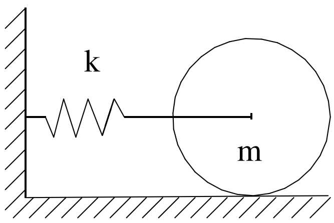
2 Harmonické kmity II

1. • [2] 1.19 vodorovné pružině zanedbatelné hmotnosti je připevněn tuhý válec o hmotnosti m, který se může valit bez klouzání po vodorovné rovině. Tuhost pružiny je $k = 3.0\mathrm{Nm}^{-1}$ (viz obrázek). Válec vychýlíme z rovnovážné polohy o $d = 0.25$m a uvolníme jej.

   (a) Vypočtěte kinetickou energii rotačního a translačního pohybu válce při průchodu rovnovážnou polohou.

   (b) Ukažte, že střed hmotnosti válce koná jednoduchý harmonický pohyb s periodou $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$.

   [(a) $E_{tr}(0) = \frac{1}{3}kd^2 = 0.0625J$, $E_{rot}(0) = \frac{1}{6}kd^2 = 0.0313J$]

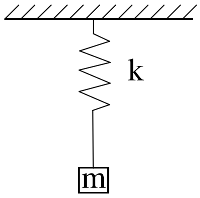


2. • Jako přibližnou fyzickou realizaci modelu matematického kyvadla lze použít kovovou kuličku na tenkém silonovém závěsu. Předpokládejte, že dobu kmitu měříte s relativní chybou 10^{-5}. Závěs kyvadla upravíte vždy tak, aby vzdálenost místa upevnění a těžiště kuličky byla 1m nezávisle na průměru kuličky. Dokažte, že doba kmitu kuličky bude vždy větší než doba kmitu matematického kyvadla stejné délky. Jaký maximální průměr může mít olověná kulička, aby se doba kmitu kuličky neodlišovala od teoretické doby kmitu matematického kyvadla stejné délky o více než experimentální chybu? Odpor prostředí zanedbejte.

   [$D < 2l\sqrt{5\cdot 10^{-5}}$, $D < 14$mm]

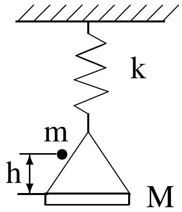
3. • [2] 1.8 K nehmotné pružině o tuhosti $k = 50\mathrm{Nm}^{-1}$ je přívázána nit, na které visí závaží o hmotnosti 1kg (viz obrázek). O jakou vzdálenost lze posunout závaží směrem dolů, aby po jeho uvolnění vznikly kmity, v jejichž průběhu by bylo vlákno stále napjaté?

   [$x \leq \frac{mg}{k} = 19.6$cm]



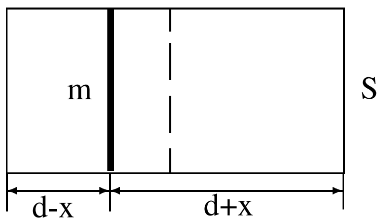
4. • [2] 1.20 Na misku o hmotnosti M, zavěšenou na pružině s konstantní tuhostí k, dopadne z výšky h kulička o hmotnosti m a zůstane na misce ležet (viz obrázek). Tento systém začne vykonávat kmitavý pohyb. Najděte amplitudu kmitů soustavy.

   [$A = \sqrt{\frac{m^2g^2}{K^2} + \frac{2m^2gh}{k(m+M)}}$]



5. • [2] 1.32 V uzavřeném válci naplněném vzduchem je píst o hmostnosti m, který rozděluje válec na dvě stejné části. Tlak vzduchu v obou částech je p_0. Píst nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy o vzdálenost x a potom uvolníme (viz obrázek). Píst začne vykonávat kmitavý pohyb. Vypočtěte periodu kmitů za předpokladu, že děj v plynu můžeme považovat za a) izotermický b) adiabatický.

   [a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{md}{2p_0S}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{md}{2\kappa p_0S}}$]

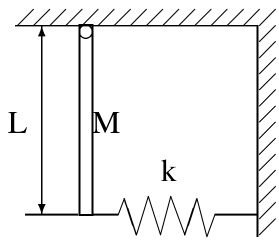


6. [2] 1.25 Homogenní tyč délky L kývá kolem vodorovné osy, kolmé k tyči. Určete, pro jakou vzdálenost d osy otáčení od hmotného středu tyče je perioda kmitů tohoto fyzického kyvadla minimální.

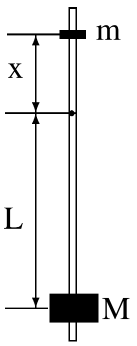
   [$d = \frac{d}{\sqrt{12}}$]

7. [2] 1.15 Homogenní tenká tyč o hmotnosti M a délce L je připevněna ke stropu tak, že se může volně otáčet bez tření kolem osy O (viz obrázek). Tyč je kromě toho připevněna ke stěně pomocí pružiny o tuhosti k. Určete periodu kmitů tyče.

   [$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{ML}{Mg+2k}}$]

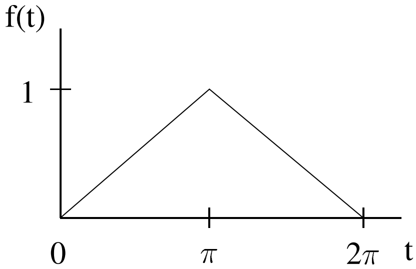


8. [2] 1.27 Kyvadlo metronomu je lehká tyčinka, na jejímž konci je ve vzdálenosti L od osy otáčení umístěno tělísko o hmotnosti M. Na druhém konci kyvadla je ve vzdálenosti x od osy umístěno posuvné tělísko o hmotnosti m, pomocí kterého lze měnit frekvenci kyvadla (viz obrázek). Najděte vztah pro kruhovou frekvenci metronomu za předpokladu, že hmotnosti tělísek M a m jsou bodové a hmotnost tyčinky je zanedbatelná. [$\omega = \sqrt{\frac{g(ML-mx)}{ML^2+mx^2}}$]



3 Fourierova analýza, tlumené harmonické kmity, skládání kmitů

1. • [2] 1.38 Pomocí Fourierovy analýzy rozložte periodickou funkci $f(t)$, jejíž jedna perioda je na obrázku. [$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\cos((2n-1)t)$]



2. • Matematické kyvadlo je přibližně realizováno olověnou kuličkou o poloměru $r = 5.0$mm a tenkým silonovým závěsem délky $l = 995$mm (takže vzdálenost hmotného středu kuličky od upevnění závěsu je právě 1.000m). Určete, jaka změna úhlové frekvence je způsobena započtením odporu vzduchu. Předpokládejte, že odporová síla je dána Stokesovým vzorcem. [$\omega = \omega_\circ\sqrt{1-\frac{3\pi\eta r}{\omega_\circ^2 m}} \doteq \omega_\circ\left(1-\frac{3}{2}\frac{\pi\eta r}{\omega_\circ^2 m}\right)$ tedy $\Delta\omega = \omega - \omega_\circ = -\frac{3}{2}\frac{\eta r}{m} = 3,13\text{s}^{-1}$, tj. $\frac{\Delta\omega}{\omega_\circ} = 2,16\cdot 10^{-3}\%$]

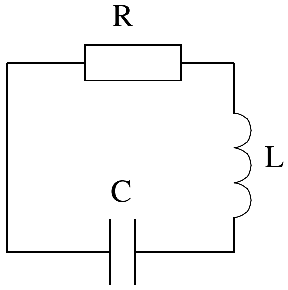
3. • Nalezněte hodnotu tuhosti pružiny, pro kterou dochází pro kuličku ponořenou do kapaliny ke kritickému tlumení. Předpokládejte, že pro odporovou sílu platí Stokesův vztah $\vec{F}_{od} = -6\pi\eta r\vec{v}$. [$k = \frac{9\pi^2\eta^2 r^2}{m}$, kde η je viskozita kapaliny, r poloměr kuličky, m její hmotnost]

4. • [2] 1.40 Jaký je logaritmický dekrement útlumu tlumeného harmonického pohybu, který koná hmotný bod, jestliže za 10s trvání pohybu ztratí hmotný bod 50% své mechanické energie? Jaký je činitel jakosti Q tohoto tlumeného oscilátoru? Perioda tlumeného pohybu je T=2s.

$[\delta = 0.0693, Q = 45.31]$

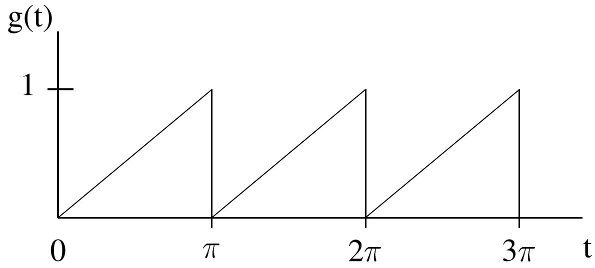
5. • [2] 1.50 Kondenzátor o kapacitě $C = 0.025\mu F$, který je nabit na potenciální rozdíl $U = 20V$, je vybíjen přes vodič o indukčnosti $L = 4\mu H$. Odpor obvodu je $R = 1\Omega$. Vypočtěte úhlovou frekvenci vlastních kmitů obvodu a jeho logaritmický dekrement útlumu.

   $[\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 3.16.10^6 s^{-1}\ \delta = \frac{\pi R}{\omega L} = 0.249]$



6. Odvoďte obecně vztah pro výslednou amplitudu a fázový posuv kmitání, které vznikne složením dvou stejnosměrných kmitů o stejné frekvenci, amplitudách A_1 a A_2 a fázích φ_1 a φ_2. $[A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_2)}, \mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}]$

7. [2] 1.39 Pomocí Fourierovy analýzy rozložte periodickou funkci $g(t)$, znázorněnou na obrázku. $[g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nt)]$



8. [4] 375 Tři po sobě následující výchylky kývající ručky galvanometru byly $n_1 = 20,0$, $n_2 = 5,6$ a $n_3 = 12,8$. Za předpokladu, že logaritmický dekrement útlumu je konstantní, určete dílek, který odpovídá rovnovážné poloze ručky.

   $[n_0 = \frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 + n_3 - 2n_2} = 10,4]$

9. [4] 377 Amplituda A tlumeného kmitavého pohybu se zmenší za jednu periodu třikrát. O kolik procent je jeho perioda T větší než perioda $T_\circ$ kmitů netlumených.

   $[T = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma T}{2\pi}\right)^2} T_\circ = 1,0152 T_\circ$, kde γ je koeficient tlumení. Perioda T je o 1,52% větší než perioda $T_\circ$ kmitů netlumených.]

4 Harmonické vynucené kmity, kmity soustav s více stupni volnosti

1. • [2] 1.47 Těleso o hmotnosti $m = 0,40$ je zavěšeno na pružině, která se po zavěšení tělíska s hmotností $m = 40$g prodlouží o $\delta x = 10$mm. Logaritmický dekrement útlumu oscilátoru s větším tělesem je $\delta = 1,57$. Oscilátor rozkmitáváme vynucující silou s amplitodou $F_\circ = 1,96$N. Určete rezonanční amplitudu a rezonanční frekvenci oscilátoru.

$[A_R = 0,104\text{m}, \Omega_R = 9,40\text{s}^{-2}]$

2. • [2] 1.48 Vlivem vnější vertikální síly $F = F_\circ \cos \omega t$ koná těleso zavěšené na pružině stacionární vynucené kmity podle vztahu $x = x_\circ \cos(\omega t - \varphi)$. Určete práci síly $F_\circ$ vykonanou během jedné periody.

   $[W = F_\circ x_\circ \pi \sin \varphi]$

3. • [2] 1.53 Homogenní struna délky 2.5m a hmotnosti 0.01kg je napjata silou 10N.

   (a) Najděte frekvenci jejího nejnižšího módu.

   (b) Jestliže strunu vychýlíme příčně a v místě vzdáleném 0.5m od jednoho konce se jí dotkneme, jaká frekvence zní v tomto případě?

   [pro výchylku struny platí $y(x,t) = A \sin\left(\frac{\omega_m x}{v}\right) \sin(\omega_m t)$, kde $\omega_m = m\omega_1$, $\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{Fl}{m}}$, tedy (a) $f_1 = 10Hz$, (b)n=5m, tedy jsou povoleny frekvence 50Hz, 100 Hz, 150 Hz,...]

4. • [2] 1.55 Homogenní tyč je upevněna ve středu a oba její konce jsou volné.

   (a) Najděte frekvence volných podélných kmitů tyče.

   (b) Určete vlnovou délku pro n-tý mód těchto kmitů

   (c) Kde se nachází uzly pro n-tý mód?

   Tyč je zhotovena z materiálu, jehož Youngův modul pružnosti je E, má délku L a její hustota je ρ.

   (a) $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

   (b) $\lambda_n = \frac{L}{n-\frac{1}{2}}$

   (c) $x = \frac{1}{2n-1}L(n - \frac{1}{2} \pm k)$,

   kde $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

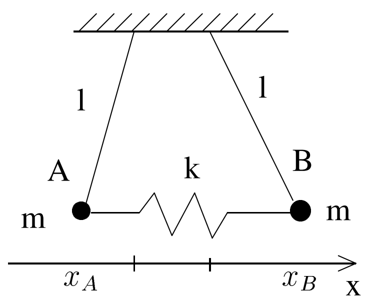
5. • Napište pohybové rovnice pro kmity soustavy dvou spřažených kyvadel (viz obrázek), určete kmitové módy soustavy.

   [$m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_A - k(x_A - x_B)$

   $m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_B - k(x_B - x_A)$,

   kde x_A (x_B) značí výchylku kuličky A (B) z její rovnovážné polohy.

   Vlastní kmitové módy jsou $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\omega' = \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{m}\right)^2}$]



6. Odvoďte vztah pro okamžitou výchylku p-té kuličky systému na obrázku, určete vlastní frekvence systému N kuliček a počet těchto kmitových módů (kmity se konají podél osy x). Okrajová podmínka: nultá a $N+1$ kulička mají v libovolném čase nulovou výchylku.

[pohybová rovnice $m\frac{d^2x_p}{dt^2} = k(x_{p-1} + x_{p+1} - 2x_p)$, její řešení je tvaru $x_p = A\sin(p\Theta + \Phi)\sin(\omega t + \varphi)$, po aplikaci okrajových podmínek dostaneme pro výchylku $x_p = A\sin(p\frac{m\pi}{N+1})\sin(\omega_m t + \varphi)$ a pro vlastní frekvence vztahy $\omega_m = 2\omega_0 \sin\frac{m\pi}{2(N+1)}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, těchto frekvencí je nejvýše N.]