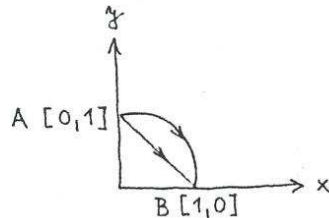


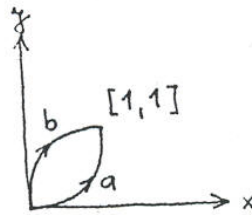
Příklady do cvičení z Termodynamiky a statistické fyziky

1. Vypočtete křivkový integrál $\int y^2 dx - x^2 dy$
 - a) po úsečce AB ,
 - b) po kruhovém oblouku AB (obr. 1).



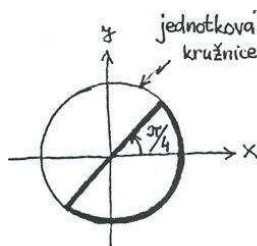
Obr. 1

2. Vypočtete křivkový integrál $\int y dx - x dy$ po obloucích a , b jednotkových kružnic (obr. 2).



Obr. 2

3. Vypočtete křivkový integrál $\int y dx + x dy$ po stejných křivkách jako v předcházejícím příkladě.
4. Vypočtete křivkový integrál $\int (x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy$ po uzavřené křivce znázorněné na obrázku 3.



Obr. 3

5. Najděte primitivní funkci k diferenciální formě $dF = (x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy$.
6. Najděte primitivní funkci k diferenciální formě $dF = (4x^3 + 3x^2y) dx + (x^3 + 6y) dy$.
7. $z = z(u, v)$ je funkcí proměnných u, v , jež jsou funkcemi proměnných x, y . Vypočtete derivace $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$.

8. Jsou-li proměnné x, y, z spojeny vztahem $f(x, y, z) = 0$, pak platí

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1.$$

Dokažte.

9. Pro proměnné z předcházejícího příkladu dokažte $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$.
10. Ukažte, že pro systém, pro nějž platí $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$, platí také $\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$.
11. Ukažte, že pro systém se stavovou rovnicí $p = p(V, T)$ platí

$$p\alpha_p = k\alpha_V,$$

kde

$$\alpha_p = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \text{ je koeficient tepelné rozpínivosti,}$$

$$\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \text{ je koeficient tepelné roztažnosti,}$$

$$k = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \text{ je izotermický objemový modul pružnosti.}$$

(Tento vztah je důležitý pro určení α_p pevných a kapalných těles, neboť tato tělesa prakticky nelze zahřát, aniž by se změnil jejich objem.)

12. Ukažte, že pro systém z předcházejícího příkladu platí vztah

$$dp = k \left(-\frac{dV}{V} + \alpha_V dT \right)$$

spojující malé změny dp, dV a dT tlaku, objemu a teploty při kvazistatickém procesu.

13. Ukažte, že elementární práce δW vykonaná systémem, který působí na své okolí tlakem p , je rovna $\delta W = p dV$, kde dV je změna objemu systému.
14. Vysvětlete, proč elementární práce δW není v obecném případě totálním diferenciálem.
15. Vysvětlete, proč elementární množství tepla δQ není v obecném případě totálním diferenciálem.
16. Vypočtěte práci, kterou vykoná nějaké množství m ideálního plynu, změní-li se jeho objem z hodnoty V_1 na hodnotu V_2
- dějem izotermickým,
 - ději izobarickým a izochorickým,
 - ději izochorickým a izobarickým.

Ze kterých z těchto přechodů by se měl sestavit cyklický děj, aby práce při něm vykonaná byla maximální?

17. Určete práci potřebnou k izotermické změně objemu nějakého množství m Van der Waalsova plynu z hodnoty V_1 na hodnotu V_2 .

18. Vypočtete práci vykonanou jedním molem ideálního plynu při kruhovém procesu, sestávajícím ze dvou izochorických a dvou izotermických procesů.
19. Ukažte, že teplota vystupující ve stavové rovnici ideálního plynu je měřena v plynové teplotní stupnici.
20. Ukažte, že pro ideální plyn vykonávající vratný Carnotův cyklus platí rovnost

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

(T_1 , T_2 je teplota ohříváče resp. chladiče; $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ je teplo přijaté od ohříváče resp. chladiče.)

21. Nechť δQ je teplo potřebné ke změně teploty soustavy o dT při konstantní veličině x . Pro jednoduchost předpokládejme, že uvažovaná soustava má pouze dva určující parametry, a to objem V a teplotu T (tzv. jednoduchý homogenní systém). Ukažte, že tepelná kapacita C_x soustavy je určena výrazem

$$C_x \equiv \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_x = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x,$$

kde E je vnitřní energie soustavy a p je tlak.

22. Dokažte vztah $C_p = C_V + R$ (Mayerův vztah) mezi izobarickou a izochorickou tepelnou kapacitou jednoho molu ideálního plynu.
23. Vypočtete rozdíl izobarické a izochorické tepelné kapacity pro systém z příkladu 21. Diskutujte velikost tohoto rozdílu pro případ pevné látky.
24. Stanovte podmínky, za nichž adiabata splývá s izotermou.
25. Na těleso působí zobecněná síla A . Určete vztah mezi změnou jí příslušné zobecněné souřadnice $\left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)$ při procesu $A = const.$ a při procesu adiabatickém.
26. Ukažte, že pro libovolnou jednoduchou homogenní soustavu platí mezi adiabatickou a izotermickou stlačitelností vztah

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{\text{adiab.}} = \frac{C_V}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

27. Tyč o délce l je roztahována silou P . Pokládáme-li deformaci za pružnou, platí mezi izotermickým a adiabatickým koeficientem prodloužení vztah

$$\left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_{\text{adiab.}} = \frac{C_l}{C_P} \left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_T.$$

Dokažte.

28. Při výměně vzduchu mezi spodními a horními vrstvami atmosféry dochází k jeho expanzi, popř. kompresi. Stoupající vzduch se v oblasti menšího tlaku rozpíná. Vzhledem k jeho malé tepelné vodivosti je možno pokládat procesy expanze a komprese za adiabatické. Vypočtete závislost teploty na výšce způsobenou těmito procesy. (Vzduch považujte za ideální plyn.)

29. Určete vnitřní energii a entropii Van der Waalsova plynu.
30. Užitím výsledků předcházejícího příkladu vypočtete práci vykonanou Van der Waalsovým plynem při vratné izotermické expanzi.
31. Vypočtete rozdíl izobarické a izochorické tepelné kapacity jednoho molu Van der Waalsova plynu. Vyjádřete tento rozdíl pomocí p a T pro silně zředěný Van der Waalsův plyn.
32. Dokažte, že $C_p \geq C_V$.
33. Najděte podmínky, za nichž je elementární práce δW totálním diferenciálem.
34. Najděte závislost změny teploty dT na změně objemu dV při vratné adiabatické expanzi (adiabatická metoda ochlazování).
35. Při adiabatické expanzi 6 litrů helia majícího teplotu 350 K klesá tlak ze 40 atm na 1 atm. Vypočtete výsledný objem a teplotu. Získané výsledky srovnajte s hodnotami, které by vyšly pro izotermickou expanzi.
36. Ukažte, že pro adiabatickou změnu absolutní teploty T magnetika splňujícího Curieův zákon

$$M = \frac{\text{const.} \cdot H}{T}$$

(M je magnetizace, H intenzita magnetického pole) platí vztah

$$dT = \text{const.} \cdot \frac{H}{C_H \cdot T} dH,$$

kde C_H je tepelná kapacita při konstantním magnetickém poli.
(Návod: $\delta W = -HdM$)

37. Za předpokladu, že se objem paramagnetika nemění
 - a) vyjádřete poměr jeho adiabatické a izotermické magnetické susceptibility pomocí tepelné kapacity při konstantní magnetizaci C_M a tepelné kapacity při konstantním magnetickém poli C_H .
 - b) a že je dána závislost magnetizace na teplotě a magnetickém poli $M = M(T, H)$, odvoďte výraz pro $C_M - C_H$.
38. Ukažte, že vnitřní energie systému se stavovou rovnicí $p = f(V) T$ nezávisí na objemu.
39. Vnitřní energie e objemové jednotky systému je funkcí pouze T . Stavová rovnice tohoto systému má tvar $p = \frac{e(T)}{3}$. Určete funkční závislost $e(T)$.
40. Vnitřní energie jednoduchého homogenního systému může být vyjádřena jednak vztahem $E = \frac{3}{2} pV$ a jednak výrazem, který závisí jenom na teplotě $E = f(T)$. Najděte na základě této informace funkci $f(T)$.
41. Odvoďte závislost mezi izobarickou tepelnou kapacitou C_p , koeficientem objemové roztažnosti $\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ a tzv. adiabatickým teplotním koeficientem definovaným vztahem $\chi = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S$.

42. Dokažte, že účinnost tepelného stroje nemůže převýšit hodnotu

$$1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \quad (\text{účinnost Carnotova cyklu}),$$

kde T_{\max} je maximální teplota rezervoárů, od kterých stroj dostává teplo,

T_{\min} je minimální teplota rezervoárů, kterým stroj předává teplo.

43. Velký praktický význam mají cyklicky pracující zařízení, která přenášejí teplo z chladnějšího rezervoáru I na teplejší II. Těchto strojů lze užívat buď k chlazení (I = ochlazovaný prostor, II = vnější prostředí; chladicí stroje) nebo k vytápění (I = vnější prostředí, II = vytápěný prostor; tepelná čerpadla). Vypočtete maximální možný topný faktor tepelného čerpadla (topný faktor tepelného čerpadla = množství tepla předaného během jednoho cyklu teplejšímu rezervoáru/práce potřebná k realizaci cyklu) pracujícího mezi teplotami $t_I = 5^\circ\text{C}$ a $t_{II} = 25^\circ\text{C}$. Porovnejte náklady na vytápění domu ideálním tepelným čerpadlem a obyčejnými elektrickými kamny.

44. Určete vnitřní energii, entropii, entalpii, Gibbsův potenciál a tlak jednoduchého homogenního systému, jehož volná energie se vyjadřuje vztahem

$$F(V, T) = -\frac{1}{3} \text{const.} VT^4.$$

45. Najděte izochorickou a izobarickou tepelnou kapacitu jednoduchého homogenního systému, je-li známa závislost $G = G(p, T)$ jeho Gibbsova potenciálu na tlaku a teplotě.

46. Dvě stejná množství (co do počtu molů) téhož ideálního plynu se stejnou teplotou T a různými tlaky p_1, p_2 jsou oddělena nepropustnou přepážkou. Určete změnu entropie při odstranění přepážky (tzv. směšovací entropie).

47. Odvoďte přibližnou rovnici křivky fázového přechodu kapalina-pára (tj. závislost tlaku nasycených par na teplotě). Předpokládejte, že páru lze popsat stavovou rovnicí ideálního plynu a že latentní teplo fázového přechodu je konstantní.

48. Proveďte fyzikální analýzu činnosti tlakového hrnce. Víte-li, že kuželka zakrývající pojistný otvor o průměru d má hmotnost m , odvoďte obecný vztah pro teplotu, při níž v tomto hrnci vře voda. Numerický výpočet proveďte pro hodnoty $d=4$ mm, $m=7$ dkg a odhadněte, jak zkrátí použití tlakového hrnce dobu přípravy oběda, je-li známo, že zvýšení teploty varu o každých 10°C zkrátí dobu potřebnou k tepelné úpravě potravin asi čtyřikrát.

49. Vysvětlete princip činnosti domácí chladničky

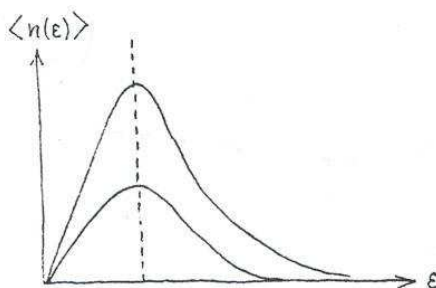
a) kompresorové,

b) absorpční.

50. Ukažte, že nemůže existovat systém, který by bylo možno v blízkosti absolutní nuly popisovat stavovou rovnicí $pV = \text{const.}T$.

51. Kostka byla vržena šestkrát. Určete pravděpodobnost toho, že
- padla právě jedna šestka,
 - padla nejméně jedna šestka,
 - padly právě dvě šestky.
52. Jaká je pravděpodobnost toho, že po třech hodech kostkou nedosáhneme více než šesti bodů?
53. Ruská ruleta se hraje takto: Do bubínku revolveru se šesti komorami se vloží jediný náboj. Hráč zatočí bubínkem, poté si přiloží revolver ke spánku a stiskne spoušť. Jaká je pravděpodobnost toho, že hráč přežije n her? Jaká je pravděpodobnost toho, že hráč přežije $n - 1$ her a zahyne v n -té hře?
54. J. Jeans ve své knize *Mysterious Universe* vydané v roce 1903 napsal: „...*Šest opic, náhodně mačkajících klávesy psacího stroje po milióny a milióny let, by mohlo časem napsat všechny knihy, které jsou uloženy v Britském muzeu. ...*“
- Toto tvrzení je mylné a vede k nesprávné představě o velmi velkých číslech. Postavme otázku skromněji: Je možné, aby všechny opice na světě napsaly třeba jen jednu knihu za dobu existence vesmíru?
- Předpokládejme, že 10^{10} opic píše na psacích strojích po celou dobu existence vesmíru, tj. 10^{18} s. (Takové množství opic převyšuje asi třikrát počet lidí, kteří kdy žili na Zemi.) Předpokládejme dále, že každá opice píše rychlostí 10 úderů/s. Psací stroj má 44 kláves (namísto velkých písmen píší opice písmena malá). Je možné, aby tyto opice napsaly např. Shakespearova Hamleta, který obsahuje přibližně 10^5 znaků?
- Najděte pravděpodobnost toho, že při náhodném napsání 10^5 znaků se dostane správná posloupnost (tj. posloupnost písmen v Hamletovi).
 - Najděte pravděpodobnost toho, že tyto písárky napíší Hamleta během celé doby existence vesmíru.
 - Najděte pravděpodobnost toho, že opice během celé své literární činnosti napíší alespoň jednu – libovolnou – z existujících knih. (Předpokládejte, že na světě existuje $30 \cdot 10^6$ různých knih po 10^5 znacích.)
55. Pohyb matematického kyvadla je popsán rovnicí $\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t$. Určete pravděpodobnost toho, že náhodné změření výchylky dá hodnotu mezi φ a $\varphi + d\varphi$.
56. Určete počet způsobů, jimiž může být rozděleno N klasických částic do g jednočásticových stavů (tj. N navzájem rozlišitelných kuliček do g přihrádek, přičemž v každé z přihrádek může být libovolný počet kuliček).
57. Určete počet způsobů, jimiž může být rozděleno N bosonů do g jednočásticových stavů (tj. N navzájem nerozlišitelných kuliček do g přihrádek, přičemž v každé z přihrádek může být libovolný počet kuliček).
58. Určete počet způsobů, jimiž může být rozděleno N fermionů do g jednočásticových stavů (tj. N navzájem nerozlišitelných kuliček do g přihrádek, přičemž v každé přihrádce může být nejvýše jedna kulička \sim Pauliho princip).
59. Ukažte, že zafixováním počtu částic v kvaziizolovaném otevřeném systému přejde jeho funkce statistického rozdělení (velké kanonické rozdělení) v kanonické rozdělení.

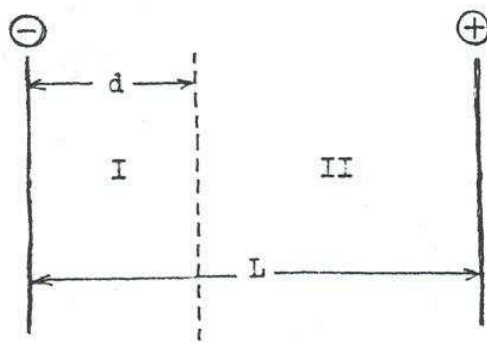
60. Ukažte, že zafixováním energie v kvaziizolovaném uzavřeném systému přejde jeho funkce statistického rozdělení (kanonické rozdělení) v malé kanonické rozdělení.
61. Najděte pro jednu molekulu (rovnovážného) ideálního plynu
- střední hodnoty kartézských komponent rychlosti,
 - střední hodnotu (velikosti) rychlosti,
 - nejpravděpodobnější rychlost,
 - střední kvadratickou rychlost $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$.
62. Najděte pro jednu molekulu (rovnovážného) ideálního plynu
- střední hodnotu kinetické energie,
 - nejpravděpodobnější hodnotu kinetické energie,
 - střední kvadratickou fluktuaci kinetické energie,
 - pravděpodobnost toho, že kinetická energie je menší než zadaná hodnota.
63. Vypočtěte střední kvadratickou fluktuaci energie ideálního plynu, který je v tepelném kontaktu (možná výměna tepla) s termostatem. (Výsledek tohoto příkladu ukazuje, že i v neizolovaných makroskopických rovnovážných systémech je energie s vysokou přesností konstantní.)
64. Najděte souvislost mezi relativní fluktuací energie systému tvořeného N molekulami ideálního plynu a relativní fluktuací energie jedné molekuly.
65. Křivky na obrázku 4. znázorňují závislost středního počtu částic $\langle n(\epsilon) \rangle$ na jejich kinetické energii ϵ pro jednotkové objemy dvou rovnovážných ideálních plynů 1, 2. Lze na základě těchto křivek porovnat teploty, tlaky a koncentrace molekul v obou systémech? Pokud ano, srovnání proveďte.



Obr. 4

66. V nádobě o objemu V je uzavřeno N molekul ideálního plynu. Pro dvě různé hodnoty tlaku p_1, p_2 načrtněte rozdělení molekul tohoto plynu podle rychlostí.
67. Najděte poměr počtu molekul (rovnovážného) ideálního plynu, jejichž energie ϵ je menší, resp. větší než nejpravděpodobnější hodnota ϵ^* této veličiny.
68. Jak je třeba změnit teplotu ideálního plynu, aby v něm střední počet molekul $\langle n(\epsilon^*, T) \rangle$ s nejpravděpodobnější energií $\epsilon^*(T)$ klesl na polovinu původní hodnoty, tj. najděte teplotu T , pro niž platí $\frac{\langle n(\epsilon^*, T) \rangle}{\langle n(\epsilon_0^*, T_0) \rangle} = \frac{1}{2}$.

69. Najděte vztah mezi nejpravděpodobnější hodnotou velikosti rychlosti v^* a nejpravděpodobnější hodnotou kinetické energie ε^* (klasického) makroskopického systému a srovnajte jej se vztahem mezi okamžitými hodnotami v , ε těchto veličin. Výsledek okomentujte.
70. Porovnejte navzájem relace spojující
- okamžité,
 - střední,
 - nejpravděpodobnější
- hodnoty hybnosti a energie jedné molekuly (rovnovážného) ideálního plynu.
71. Zředěný plyn je uzavřen v nádobě o objemu V při tlaku p . Za předpokladu, že rozdělení molekul podle rychlostí je maxwellovské, určete:
- počet molekul, které vyletí za jednotku času malým otvorem (o ploše S) ve stěně do vakua,
 - rozdělení těchto molekul podle komponenty rychlosti kolmé na stěnu,
 - úhlové rozdělení vyletujících částic.
72. Zředěný plyn o teplotě T je uzavřen v nádobě o objemu V , z níž jeho molekuly unikají malým otvorem (o ploše S) ve stěně do vakua. Za jak dlouho klesne tlak v nádobě o setinu původní hodnoty?
73. Odvoďte barometrickou formuli, tj. závislost hustoty (tlaku) vzduchu na výšce v gravitačním poli Země. (Gravitační pole považujte za homogenní, vzduch za rovnovážný ideální plyn.)
74. Ukažte, že molekuly rovnovážného ideálního plynu, na něž není přiloženo žádné vnější pole, jsou rozptýleny rovnoměrně po celé nádobě, ve které je plyn uzavřen, a v jejich pohybu není preferován žádný směr (tzv. molekulární chaos).
75. Klasický ideální plyn nabitých částic (hmotnost m , náboj $q > 0$) o teplotě T je umístěn do homogenního stacionárního elektrického pole o intenzitě $\vec{\mathcal{E}}$ (obr. 5.). Do jaké vzdálenosti d od záporné desky bychom měli vsunout přepážku, aby střední počet částic v obou takto vzniklých oblastech I, II byl stejný?

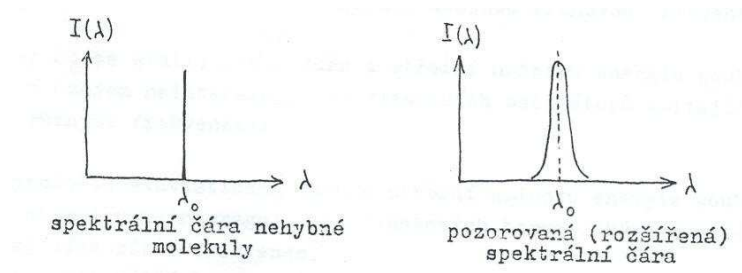


Obr. 5

76. V peci je plyn o vysoké teplotě. Přes malé okénko ve stěně pece pozorujeme spektrometrem spektrální čáry záření emitovaného molekulami. Tyto čáry jsou rozšířeny v důsledku Dopplerova jevu (obr. 6.). Dokažte, že pro intenzitu $I(\lambda)$ záření o vlnové délce λ platí

$$I(\lambda) \sim \exp \left[-\frac{mc^2 (\lambda - \lambda_0)^2}{2\lambda_0^2 kT} \right],$$

kde T je teplota pece, c – rychlost světla, m – hmotnost molekuly, λ_0 – vlnová délka spektrální čáry nehybné molekuly.



Obr. 6

77. Ukažte, že kinetická metoda nalezení souvislosti mezi tlakem \mathcal{P} , objemem V a střední hodnotou celkové kinetické energie $\langle E \rangle = \langle \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \rangle$ rovnovážného plynového tělesa, pro něž $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, založená na výpočtu středního impulsu předávaného jeho molekulami za jednotku času jednotkové ploše stěny nádoby, v níž je uzavřeno, vede k výsledku

$$\mathcal{P}V = \frac{2}{3} \langle E \rangle$$

bez ohledu na to, jaké rozdělení jeho molekul podle rychlostí se při odvozování použije.

Poznámka: Uvedený vztah napsal poprvé Rudolf Clausius, a to už v roce 1857, tedy tři roky před objevem Maxwellova rozdělení molekul podle rychlostí. Dospěl k němu postupem popsaným v zadání, přičemž předpokládal – ve shodě s tehdy všeobecně rozšířeným názorem – že velikost rychlosti všech molekul rovnovážného plynového tělesa je stejná.

78. Přesvědčte se, že aplikace postupu popsaného v zadání předcházejícího příkladu na rovnovážný fotonový plyn (= rovnovážné tepelné záření = záření absolutně černého tělesa), pro jehož „částice“ platí relace $\varepsilon = cp$ mezi energií ε a hybností p , přivede k závěru

$$\mathcal{P}V = \frac{1}{3} \langle E \rangle$$

(stavová rovnice rovnovážného tepelného záření).

79. Klasický popis dvouatomových molekul užívá dvou alternativních modelů: model 1 – tuhá činka, model 2 – pružná činka (obr. 7). Určete izochorickou tepelnou kapacitu ideálního plynu sestávajícího z N dvouatomových molekul. Ovlivní volba modelu tento výsledek?



Obr. 7

80. Vypočtete Poissonův koeficient $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ klasického ideálního plynu za předpokladu, že jeho molekuly jsou
- jednoatomové,
 - dvouatomové.
81. Vypočtete statistickou sumu systému sestávajícího z N molekul ideálního plynu uzavřeného v nádobě o objemu V při teplotě T . Pro výpočet použijte
- představ klasické mechaniky,
 - představ kvantové mechaniky.
- Oba výsledky porovnejte a diskutujte jejich případnou odlišnost.
82. Užitím výsledku předcházejícího příkladu odvoďte stavovou rovnici ideálního plynu.
83. Velký počet N navzájem neinteragujících částic bez vnitřní struktury (hmotných bodů o hmotnosti m) je uzavřeno v nádobě o objemu V při teplotě T . Najděte volnou energii, entropii, vnitřní energii a tlak tohoto systému.
84. Zdůvodněte a výpočtem dokažte následující „poučku“ ze základního kurzu fyziky: *„Všechny ideální plyny (bez ohledu na strukturu molekul) se řídí touž stavovou rovnicí $pV = \text{const} \cdot T$, jejich měrná tepla (tepelné kapacity) však na struktuře molekul závisí.“*
85. Ideální plyn sestávající z navzájem neinteragujících dipólových molekul s konstantním elektrickým dipólovým momentem p je umístěn do vnějšího homogenního stacionárního elektrického pole $\vec{\mathcal{E}}$. Vypočtete elektrickou polarizaci \vec{P} tohoto plynu.
86. Vypočtete izochorickou tepelnou kapacitu souboru N navzájem neinteragujících
- klasických,
 - kvantových
- harmonických oscilátorů majících stejnou kruhovou frekvenci ω .
87. Vypočtete statistickou sumu a střední hodnotu energie souboru N navzájem neinteragujících klasických oscilátorů kmitajících s různými frekvencemi.
88. Vypočtete statistickou sumu a střední hodnotu energie souboru N navzájem neinteragujících kvantových harmonických oscilátorů majících různé frekvence.
- Stanovte podmínky, za nichž by bylo možné tento systém popisovat klasicky, a přesvědčte se, že při jejich splnění získané výsledky splynou s výsledky předcházejícího příkladu (tzv. klasická limita).
89. Vypočtete hustotu jednočásticových stavů $g(\varepsilon)$ pro soubor navzájem neinteragujících částic, jejichž energie ε souvisí s jejich hybností p vztahem
- $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$,
 - $\varepsilon = cp$.
90. Fermiho–Diracova statistika $f_{\text{FD}}(\varepsilon)$ udává střední počet částic systému (ideálního Fermiho plynu) v jednočásticovém stavu s energií ε resp. pravděpodobnost obsazení takového stavu fermionem. Jaký fyzikální význam má

- a) Boseho–Einsteinova statistika?
- b) Boltzmannova statistika?

91. Stanovte podmínky, za nichž lze kvantové statistiky nahradit statistikou klasickou, tj. podmínky použitelnosti klasické statistiky.
92. Odhadněte teplotu, od níž počínaje lze pro popis reálných plynů užívat klasické statistiky. (Numerický odhad proveďte pro vodík za normálního tlaku).
93. Odvoďte Planckův vyzařovací zákon udávající spektrální hustotu energie rovnovážného tepelného záření, vyšetřete závislost polohy jejího maxima na teplotě (Wienův posunovací zákon) a najděte výraz pro střední hodnotu energie tohoto systému (Stefanův–Boltzmannův zákon).
94. Najděte asymptotické tvary Planckova vyzařovacího zákona pro nízké frekvence a pro vysoké frekvence a oba případy fyzikálně interpretujte.
95. Najděte závislost tlaku rovnovážného tepelného záření na teplotě.
96. Kovový vzorek o Fermiho energii ε_F má teplotu T . Vypočtete
 - a) pravděpodobnost obsazení jednoelektronového stavu o energii ε_F ,
 - b) poměr pravděpodobností obsazení jednoelektronových stavů o energiích $\varepsilon_F + kT$ a $\varepsilon_F - kT$,
 - c) pravděpodobnost toho, že vodivostní elektron bude mít energii ε_F .
97. Přímým výpočtem derivace Fermiho–Diracovy statistiky podle energie se přesvědčte, že její průběh v okolí Fermiho meze je tím strmější, čím nižší je teplota.
98. Dokažte, že při libovolné teplotě platí

$$f_{\text{FD}}(\varepsilon_F + \delta) = 1 - f_{\text{FD}}(\varepsilon_F - \delta) ,$$

kde ε_F je Fermiho energie, a vysvětlete fyzikální význam tohoto výsledku.

99. Vypočtete Fermiho energii ε_F souboru N navzájem neinteragujících volných ($\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$) fermionů, zaujímajícího při teplotě $T = 0$ objem V (úplně degenerovaný ideální Fermiho plyn). Na základě získaného obecného výsledku odhadněte číselnou hodnotu Fermiho energie pro běžné kovy.
100. Vypočtete vnitřní energii a tlak úplně degenerovaného Fermiho plynu.