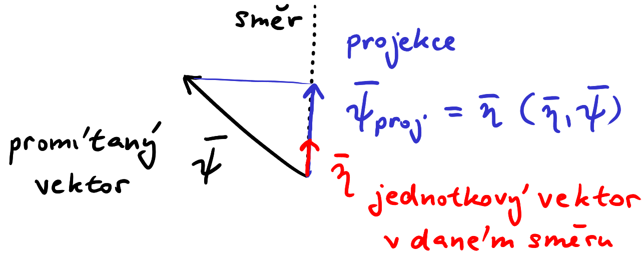
Projektory

- operátory extrahující komponentu stavového vektoru v určitém „směru"

  $\hat{P}_\eta = |\eta\rangle\langle\eta|$ ... projektor na $|\eta\rangle$

  (vyžaduje normovanost $\langle\eta|\eta\rangle = 1$)

2D analogie:



působení na stavový vektor $\hat{P}_\eta|\psi\rangle = |\eta\rangle\langle\eta|\psi\rangle$

dodá směr ($|\eta\rangle$) určí délku projekce ($\langle\eta|\psi\rangle$)

zápis $|\eta\rangle\langle\eta|\psi\rangle$ odpovídá $\eta(x)\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \eta^*(x')\,\psi(x')$

- relace úplnosti vystavěná z projektorů: $\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}$

ověření $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle\,|n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle = \overbrace{\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)}^{\hat{1}}|\psi\rangle$

Spektrální teorém

$\hat{A}$ je hermiteovský operátor, jeho vlastní vektory mohou být dvojího druhu (i současně)

1) vlastní vektory z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ $\quad \hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \quad$ (diskrétní spektrum)

2) nepravé vlastní vektory mimo $\mathcal{H}$ $\quad \hat{A}|a\rangle = a|a\rangle \quad$ (spojité spektrum)
(nelze normovat)

(ne)degenerovaná vlastní hodnota – (ne) přísluší jí více nezávislých vlastních vektorů

Př. konečně hluboká jáma, hledáme vlastní stavy $\hat{H}$: $\quad \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad$ stacionární SchR

1) několik vázaných stavů s energiemi $E_n < V_0$ (nedegenerované)

2) nekonečně mnoho rozptylových stavů s $E > V_0$ (2x degenerované)

tvrzení:

a) všechny vlastní hodnoty jsou reálné tj. $a_n, a \in \mathbb{R}$

b) vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou ortogonální

c) vlastní vektory z obou částí spektra tvoří úplný soubor
– (zobecněnou) bázi Hilbertova prostoru

Postuláty kvantové mechaniky

P1 Stav systému je reprezentován normovaným vektorem z příslušného Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$.

P2 Pozorovatelné veličiny odpovídají samosdruženým / hermiteovským operátorům působícím na $\mathcal{H}$.

P3 Možnými výsledky měření veličiny A jsou pouze vlastní hodnoty příslušného operátoru $\hat{A}$ dané řešením vlastního problému $\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$.

Bezprostředně po měření s výsledkem a_n se systém nachází ve vlastním stavu příslušném a_n (je-li nedegenerovaná) nebo v normované projekci na podprostor příslušný a_n (je-li degenerovaná):

$$|\psi\rangle \rightarrow \text{normovaný } \hat{P}_{a_n}|\psi\rangle = \frac{\hat{P}_{a_n}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_{a_n}|\psi\rangle}}$$

(redukce / kolaps stavu při měření)

P4 Pravděpodobnosti naměření jednotlivých vlastních hodnot ve stavu $|\psi\rangle$ jsou dány

$$P(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

pravděpodobnosti pro diskrétní spektrum
(v degenerovaném případě sčítáme P přes degenerované vektory)

P5 Časový vývoj systému je popsán Schrödingerovou rovnicí $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

alternativní formulace P4: průměrný výsledek měření je střední hodnota $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle + \dots \qquad \text{kde} \quad c_n = \langle a_n | \psi \rangle$$

$|\psi\rangle$

a_1 s pravděpodobností $P(a_1) = |\langle a_1 | \psi \rangle|^2 = |c_1|^2$

a_2 s $P(a_2) = |\langle a_2 | \psi \rangle|^2 = |c_2|^2$

$\vdots$

průměr z hodnot získaných z velkého počtu měření (vždy na $|\psi\rangle$)

$$\langle A \rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n |\langle a_n | \psi \rangle|^2 =$$

$$= \sum_n \underbrace{\langle \psi | a_n \rangle}_{c_n^*} a_n \underbrace{\langle a_n | \psi \rangle}_{c_n} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{A} \rangle$$

červené části spolu vytvářejí $\hat{A}$